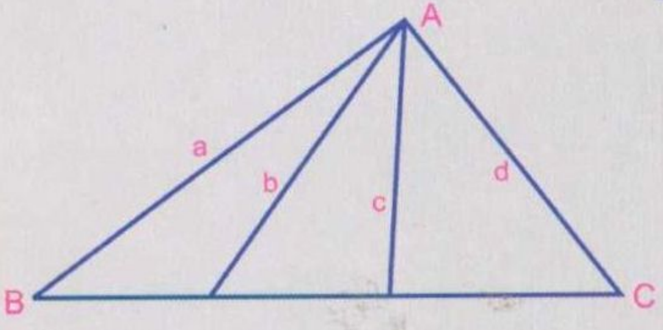
NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

GIẢI BÀI TẬP
ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11
NÂNG CAO



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

Giải bài tập
ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11
NÂNG CAO

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Đơn vị liên kết :
Công ty sách hoa hồng

Lời nói đầu

Theo tinh thần đổi mới phương pháp dạy và học hiện nay, chúng tôi biên soạn quyển sách này theo cấu trúc như sau:

- ***Tóm tắt lí thuyết**: Giúp học sinh nắm vững và củng cố kiến thức cơ bản bài học.*
- ***Hệ thống bài tập**: Giúp học sinh vận dụng và rèn luyện kĩ năng tư duy toán học.*
- *Đặc biệt có phần **Bài tập làm thêm** giúp học sinh làm quen với cách vận dụng kiến thức toán đã học để giải quyết tốt các dạng bài tập thường gặp trong các kì kiểm tra, thi cử.*

Quý phụ huynh có thể tham khảo quyển sách này để giúp đỡ, kiểm tra việc ôn tập ở nhà của con em mình. Quý thầy cô có thể xem đây như là tài liệu tham khảo thêm.

Chúng tôi mong đón nhận ý kiến xây dựng từ quý độc giả.

NHÓM BIÊN SOẠN

Chương 1 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Các hàm số y = sinx và y = cosx :

a) Tập xác định

Tập xác định của hàm số y = sinx và y = cosx là D = R.

Hàm số y = sinx là hàm số lẻ.

Hàm số y = cosx là hàm số chẵn.

b) Tính chất tuần hoàn của các hàm số y = sinx và y = cosx

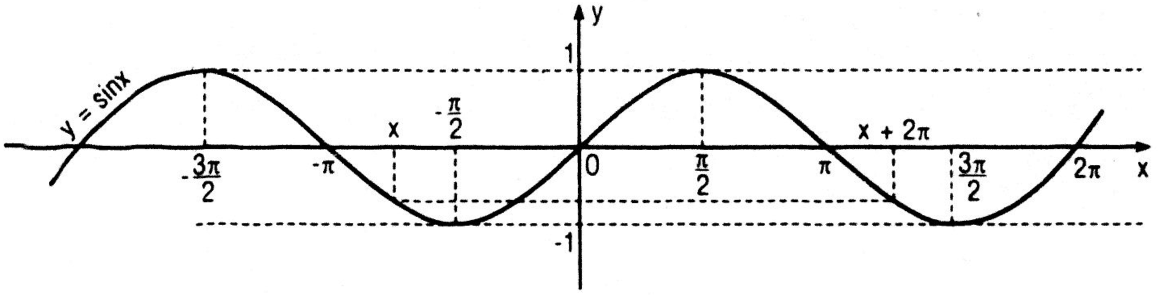
Hàm số y = sin x và y = cosx là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π.

c) Sự biến thiên và đồ thị của hàm số y = sinx

* *Bảng biến thiên của hàm số y = sinx trên đoạn [−π; π] như sau :*

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
y = sinx	0	↘	−1	↗	0	↗	1	↘	0

* *Đồ thị hàm số y = sinx*



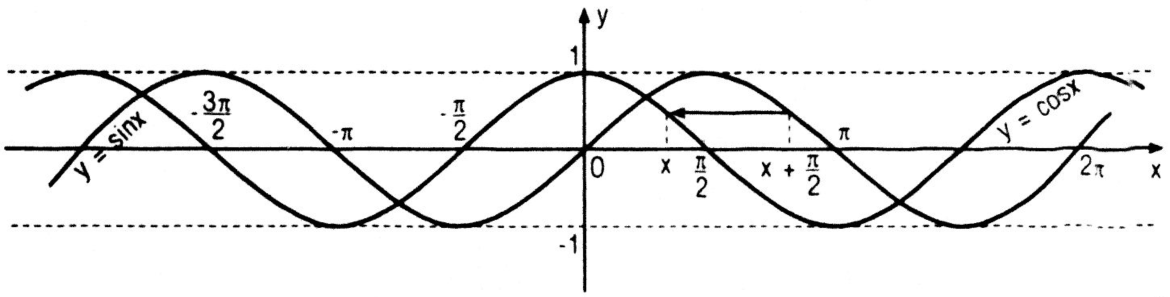
d) Sự biến thiên và đồ thị của hàm số y = cosx

* *Bảng biến thiên của hàm số y = cosx trên đoạn [−π; π]*

x	−π		0		π
y = cosx	−1	↗	1	↘	−1

* *Đồ thị hàm số y = cosx*

Ta có : $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ *với mọi x, nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số y = sinx sang trái một đoạn có độ dài* $\frac{\pi}{2}$, *ta được đồ thị hàm số y = cosx (nó cũng được gọi là một đường hình sin).*



*** Chú ý :**

Hàm số y = sinx và y = cosx có tập xác định là R, tập giá trị là [−1 ; 1], là hàm số tuần hoàn có chu kì 2π và có đồ thị là một đường sin.

2. Các hàm số y = tanx và y = cotx :

a) Tập xác định

- *Hàm số y = tanx xác định với mọi* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$

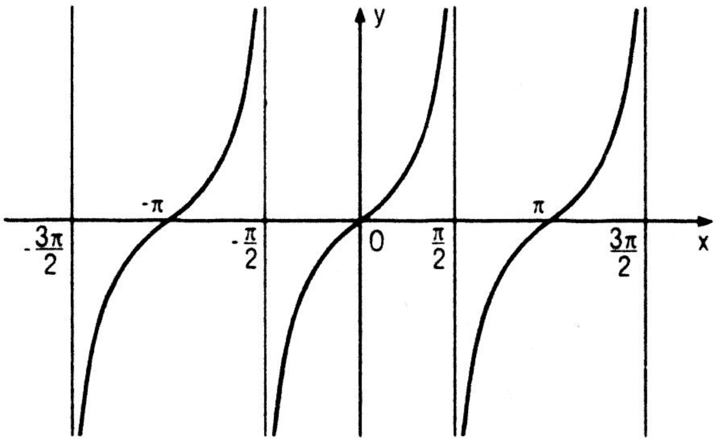
  Hàm số y = tanx là một hàm số lẻ.
- *Hàm số y = cotx xác định với mọi* $x \neq k\pi$ $(k \in Z)$

  Hàm số y = cotx là một hàm số lẻ.

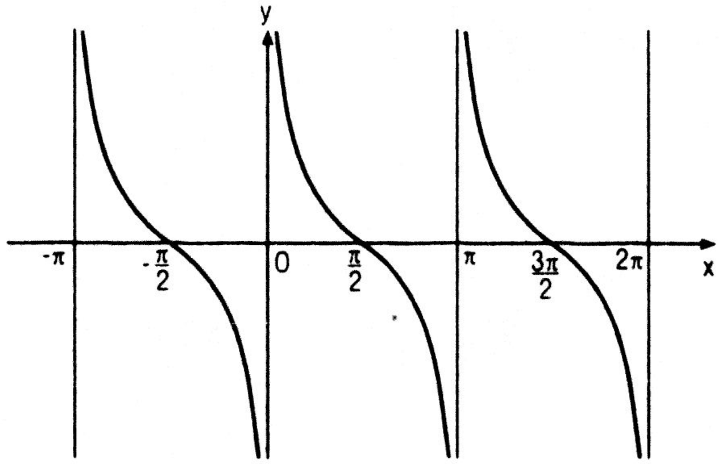
b) Tính chất tuần hoàn

Hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là những hàm số tuần hoàn với chu kì π.

c) Đồ thị của hàm số y = tanx



d) Đồ thị của hàm số y = cotx



*** *Chú ý :***

- *Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định $D_1 = R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in Z\}$;*

  Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định $D_2 = R \setminus \{k\pi \mid k \in Z\}$.
- *Hai hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ có tập giá trị là R, là hàm số lẻ và là các hàm tuần hoàn có chu kì π.*

3. Về khái niệm hàm số tuần hoàn :

Hàm số y = f(x) xác định trên tập hợp $\mathcal{D}$ được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số T ≠ 0 sao cho với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có :

$$x + T \in \mathcal{D},\ x - T \in \mathcal{D},\ \text{và } f(x + T) = f(x)$$

Nếu có số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì hàm số đó được gọi là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ T.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. *Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :*

a) $y = \sqrt{3 - \sin x}$; b) $y = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$;

c) $y = \sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}$; d) $y = \tan(2x + \dfrac{\pi}{3})$.

Giải

a) Vì $-1 \le \sin x \le 1$ nên $3 - \sin x > 0$ với mọi x nên tập xác định của hàm số là R. D = R

b) $y = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$ xác định khi và chỉ khi $\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in Z$.

Vậy tập xác định $D = R \setminus \{k\pi / k \in Z\}$

c) Vì $1 - \sin x \ge 0$ và $1 + \cos x \ge 0$ nên hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi, k \in Z$

Vậy tập xác định $D = R \setminus \{\pi + k2\pi / k \in Z\}$

d) $y = \tan(2x + \dfrac{\pi}{3})$ xác định $\Leftrightarrow \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0$

$\Leftrightarrow 2x + \dfrac{\pi}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in Z$

Vậy tập xác định $D = R \setminus \{\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2} / k \in Z\}$

2. *Xét tính chẵn – lẻ của mỗi hàm số sau :*

a) $y = -2\sin x$; b) $y = 3\sin x - 2$;

c) $y = \sin x - \cos x$; d) $y = \sin x\cos^2 x + \tan x$

Giải

a) $f(x) = -2\sin x$

Tập xác định D = R, ta có $f(-x) = -2\sin(-x) = 2\sin x = -f(x), \forall x \in R$

Vậy $y = -2\sin x$ là hàm số lẻ.

b) $f(x) = 3\sin x - 2$

Ta có : $f(\frac{\pi}{2}) = 1$; $f(-\frac{\pi}{2}) = -5$

$f(-\frac{\pi}{2}) \neq -f(\frac{\pi}{2})$ và $f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$ nên hàm số $y = 3\sin x - 2$ không phải là hàm số chẵn cũng không phải là hàm số lẻ.

c) $f(x) = \sin x - \cos x$

Ta có $f(\frac{\pi}{4}) = 0$; $f(-\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$

$f(-\frac{\pi}{4}) \neq -f(\frac{\pi}{4})$ và $f(-\frac{\pi}{4}) \neq f(\frac{\pi}{4})$ nên $y = \sin x - \cos x$ không phải là hàm số lẻ cũng không phải là hàm số chẵn.

d) $f(x) = \sin x\cos^2 x + \tan x$

Tập xác định $D = R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} / k \in Z\}$

$\forall x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = \sin(-x)\cos^2(-x) + \tan(-x)$

$$= -\sin x\cos^2 x - \tan x = -f(x)$$

nên hàm số đã cho là hàm số lẻ.

3. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau :*

a) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3$; *b)* $y = \sqrt{1 - \sin(x^2)} - 1$; *c)* $y = 4\sin\sqrt{x}$

Giải

a) Ta có $-1 \leq \cos(x + \frac{\pi}{3}) \leq 1$

$$\Rightarrow -2 \leq 2\cos(x + \frac{\pi}{3}) \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 2\cos(x + \frac{\pi}{3}) + 3 \leq 5 \Rightarrow 1 \leq y \leq 5$$

Vậy min y = 1 khi $x + \frac{\pi}{3} = \pi + k2\pi$ tức $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

max y = 5 khi $x + \frac{\pi}{3} = k2\pi$ tức $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in Z)$

b) Ta có $0 \leq 1 - \sin x^2 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq \sqrt{1 - \sin x^2} - 1 \leq \sqrt{2} - 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq \sqrt{2} - 1$

Vậy min $y = -1$ khi $x^2 = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \geq 0, k \in Z$

max $y = \sqrt{2} - 1$ khi $x^2 = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k > 0, k \in Z$

c) Ta có $-1 \le \sin\sqrt{x} \le 1 \Rightarrow -4 \le 4\sin\sqrt{x} \le 4$

$\Rightarrow -4 \le y \le 4$

Vậy $\min y = -4$ khi $\sqrt{x} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k > 0,\ k \in Z$

$\max y = 4$ khi $\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \ge 0,\ k \in Z$

4. *Cho các hàm số $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \tan x$ và các khoảng*

$$J_1 = \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right); \quad J_2 = \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right); \quad J_3 = \left(\frac{31\pi}{4}; \frac{33\pi}{4}\right); \quad J_4 = \left(-\frac{452\pi}{3}; \frac{601\pi}{4}\right)$$

Hỏi hàm số nào trong ba hàm số đồng biến trên khoảng J_1 ? Trên khoảng J_2 ? Trên khoảng J_3 ? Trên khoảng J_4 ? (Trả lời bằng cách lập bảng).

Giải

Chú ý rằng $J_3 = \left(8\pi - \frac{\pi}{4}; 8\pi + \frac{\pi}{4}\right)$, $J_4 = \left(-150\pi - \frac{2\pi}{3}; -105\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

Ta có bảng sau, trong đó dấu "+" có nghĩa "đồng biến", dấu "0" có nghĩa "không đồng biến" :

Hàm số	J_1	J_2	J_3	J_4
$f(x) = \sin x$	0	+	+	0
$g(x) = \cos x$	+	0	0	+
$h(x) = \tan x$	+	+	+	0

5. *Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ? Giải thích vì sao ?*

a) Trên mỗi khoảng mà hàm số $y = \sin x$ đồng biến thì hàm số $y = \cos x$ nghịch biến.

b) Trên mỗi khoảng mà hàm số $y = \sin^2 x$ đồng biến thì hàm số $y = \cos^2 x$ nghịch biến.

Giải

a) Sai vì trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hàm số $y = \sin x$ đồng biến nhưng hàm số $y = \cos x$ không nghịch biến.

b) Đúng do $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Giả sử $y = \sin^2 x$ đồng biến trên khoảng I, khi đó với $x_1, x_2 \in I$ và $x_1 < x_2$ thì $\sin^2 x_1 < \sin^2 x_2$

$\Rightarrow 1 - \sin^2 x_1 > 1 - \sin^2 x_2 \Rightarrow \cos^2 x_1 > \cos^2 x_2$

$\Rightarrow y = \cos^2 x$ nghịch biến trên I.

6. *Cho hàm số $y = f(x) = 2\sin 2x$.*

a) Chứng minh rằng với số nguyên k tùy ý, luôn có $f(x + k\pi) = f(x)$ với mọi x.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số $y = 2\sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

c) Vẽ đồ thị hàm số $y = 2\sin 2x$.

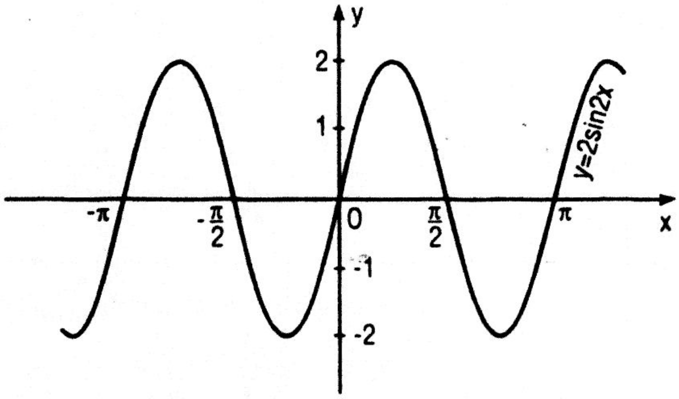
Giải

a) Ta có $f(x + k\pi) = 2\sin 2(x + k\pi) = 2\sin(2x + k2\pi) = 2\sin 2x = f(x), \forall x \in R$.

b) Bảng biến thiên :

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
2x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
2sin2x	0 ↘	-2 ↗	0 ↗	2 ↘	0

c) Đồ thị :



7. *Xét tính chẵn lẻ của mỗi hàm số sau :*

a) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; *b) $y = \tan|x|$;* *c) $y = \tan x - \sin 2x$*

Giải

a) Ta có $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$, $f(\frac{\pi}{4}) = 1$, $f(-\frac{\pi}{4}) = 0$

$f(-\frac{\pi}{4}) \neq f(\frac{\pi}{4})$ và $f(-\frac{\pi}{4}) \neq -f(\frac{\pi}{4})$ nên $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ không phải là hàm số chẵn cũng không phải là hàm số lẻ.

b) $f(x) = \tan|x|$. Tập xác định $D = R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z\}$

$x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = \tan|-x| = \tan|x| = f(x)$

Do đó $y = \tan|x|$ là hàm số chẵn.

c) $f(x) = \tan x - \sin 2x$. Tập xác định $D = R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z\}$

$x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = \tan(-x) - \sin(-2x)$

$= -\tan x + \sin 2x = -(\tan x - \sin 2x) = -f(x)$

Do đó $y = \tan x - \sin 2x$ là hàm số lẻ.

8. *Cho các hàm số sau :*

a) $y = -\sin^2 x$; *b)* $y = 3\tan^2 x + 1$;

c) $y = \sin x \cos x$; *d)* $y = \sin x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$.

Chứng minh rằng mỗi hàm số $y = f(x)$ đó đều có tính chất :

$f(x + k\pi) = f(x)$ với $k \in Z$, x thuộc tập xác định của hàm số f.

Giải

Với $k \in Z$ ta có :

a) $f(x) = -\sin^2 x$

$f(x + k\pi) = -\sin^2(x + k\pi) = -[(-1)^k \sin x]^2 = -\sin^2 x = f(x)$

b) $f(x) = 3\tan^2 x + 1$

$f(x + k\pi) = 3\tan^2(x + k\pi) + 1 = 3\tan^2 x + 1 = f(x)$

c) $f(x) = \sin x \cos x$

$f(x + k\pi) = \sin(x + k\pi) . \cos(x + k\pi) = (-1)^k \sin x.(-1)^k \cos x$

$= \sin x \cos x = f(x)$

d) $f(x) = \sin x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$f(x + k\pi) = \sin(x + k\pi)\cos(x + k\pi) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x + k2\pi)$

$= (-1)^k \sin x(-1)^k \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \sin x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = f(x)$

9. *Cho hàm số $y = f(x) = A\sin(\omega x + \alpha)$ (A, ω và α là các hằng số; A và ω khác 0). Chứng minh rằng với mỗi số nguyên k, ta có $f\left(x + k.\frac{2\pi}{\omega}\right) = f(x)$ với mọi x.*

Giải

Với $k \in Z$ ta có :

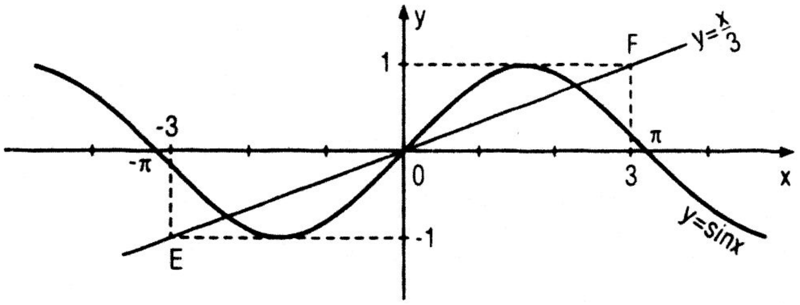
$f(x + k . \frac{2\pi}{\omega}) = A\sin[\omega(x + k\frac{2\pi}{\omega}) + \alpha]$

$= A\sin(\omega x + \alpha + k2\pi) = A\sin(\omega x + \alpha) = f(x)$

10. *Chứng minh rằng mọi giao điểm của đường thẳng xác định bởi phương trình $y = \frac{x}{3}$ với đồ thị của hàm số $y = \sin x$ đều cách gốc tọa độ một khoảng nhỏ hơn $\sqrt{10}$.*

Giải

Đường thẳng $y = \frac{x}{3}$ đi qua các điểm $E(-3; -1)$ và $F(3; 1)$



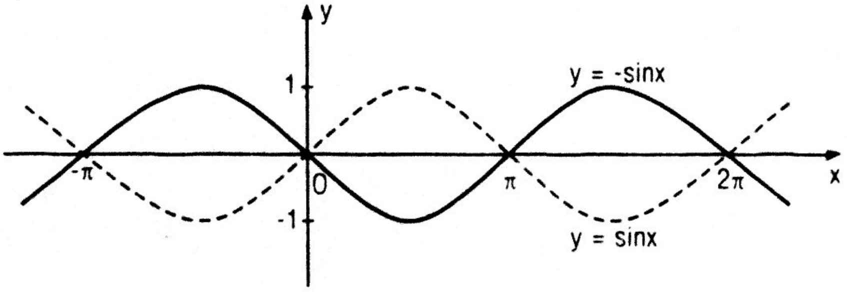
Chỉ có đoạn thẳng EF của đường thẳng đó nằm trong dải $\{(x; y) \mid -1 \le y \le 1\}$ (dải này chứa đồ thị của hàm số y = sinx). Vậy các giao điểm của đường thẳng $y = \frac{x}{3}$ với đồ thị của hàm số y = sinx phải thuộc đoạn thẳng EF; mọi điểm của đoạn thẳng này cách O một khoảng không dài hơn $\sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ (và rõ ràng E, F không thuộc đồ thị của hàm số y = sinx).

11. *Từ đồ thị của hàm số y = sinx, hãy suy ra đồ thị của các hàm số sau và vẽ đồ thị của các hàm số đó :*

a) $y = -\sin x$; *b)* $y = |\sin x|$; *c)* $y = \sin|x|$.

Giải

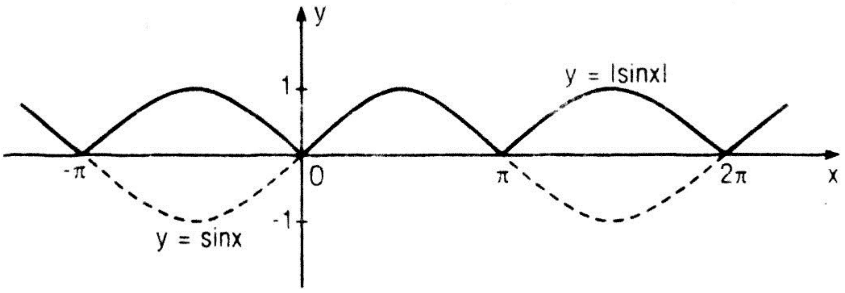
a) Đồ thị của hàm số y = − sinx là hình đối xứng qua trục hoành của đồ thị hàm số y = sinx



b) Ta có : $|\sin x| = \begin{cases} \sin x \text{ nếu } \sin x \ge 0 \\ -\sin x \text{ nếu } \sin x < 0 \end{cases}$

do đó đồ thị của hàm số y = |sinx| có được từ đồ thị (𝒞) của hàm số y = sinx bằng cách :

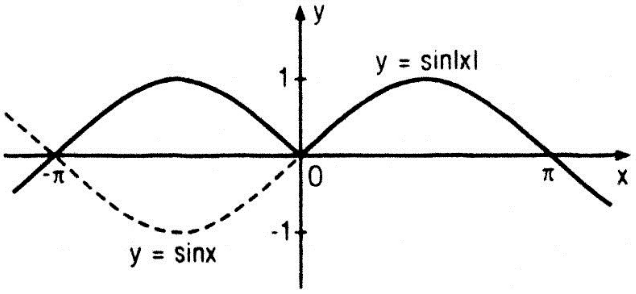
- Giữ nguyên phần đồ thị của (𝒞) nằm trong nửa mặt phẳng y ≥ 0 (tức là nửa mặt phẳng bên trên trục hoành kể cả bờ Ox).
- Lấy hình đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị (𝒞) nằm trong nửa mặt phẳng y < 0 (tức là nửa mặt phẳng bên dưới trục hoành không kể bờ Ox);
- Xóa phần đồ thị của (𝒞) nằm trong nửa mặt phẳng y < 0.
- Đồ thị y = |sinx| là đường liền nét trong hình dưới đây :



c) Ta có : $\sin|x| = \begin{cases} \sin x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -\sin x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$

do đó đồ thị của hàm số $y = \sin|x|$ có được từ đồ thị ($\mathscr{C}$) của hàm số $y = \sin x$ bằng cách :

- Giữ nguyên phần đồ thị của ($\mathscr{C}$) nằm trong nửa mặt phẳng $x \geq 0$ (tức nửa mặt phẳng bên phải trục tung kể cả bờ Oy);
- Xóa phần đồ thị của ($\mathscr{C}$) nằm trong nửa mặt phẳng $x < 0$ (tức nửa mặt phẳng bên trái trục tung không kể bờ Oy);
- Lấy hình đối xứng qua trục tung của phần đồ thị ($\mathscr{C}$) nằm trong nửa mặt phẳng $x > 0$.
- Đồ thị $y = \sin|x|$ là đường nét liền trong hình dưới đây :

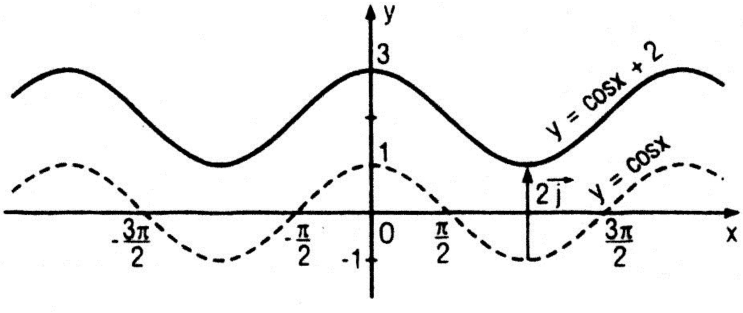


12. *a) Từ đồ thị hàm số y = cosx, hãy suy ra đồ thị của hàm số sau và vẽ đồ thị của các hàm số đó :* $y = \cos x + 2$; $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

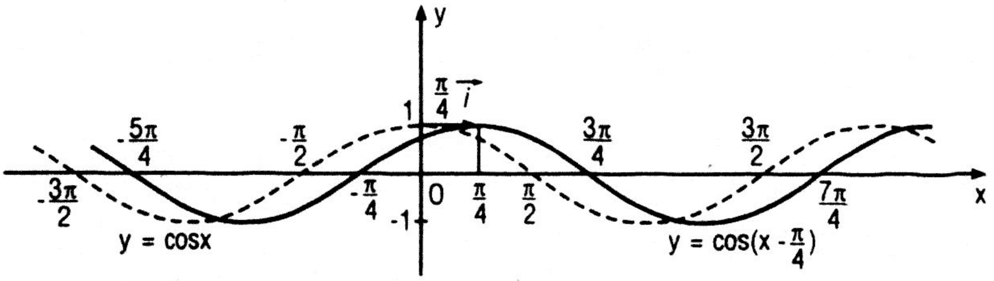
b) Hỏi mỗi hàm số đó có phải là hàm số tuần hoàn không ?

Giải

a) Đồ thị của hàm số $y = \cos x + 2$ có được do tịnh tiến đồ thị của hàm số $y = \cos x$ lên trên một đoạn có độ dài bằng 2, tức là tịnh tiến theo vectơ $2\vec{j}$ ($\vec{j} = (0, 1)$ là vectơ đơn vị trên trục tung).



Đồ thị của hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ có được do tịnh tiến đồ thị của hàm số $y = \cos x$ sang phải một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{4}$, tức là tịnh tiến theo vectơ $\frac{\pi}{4}\vec{i}$ ($\vec{i} = (1, 0)$ là vectơ đơn vị trên trục hoành).



b) Các hàm số trên đều là hàm tuần hoàn vì :

nếu $f(x) = \cos x + 2$ thì $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) + 2 = \cos x + 2 = f(x), \forall x \in R$

và nếu $g(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ thì $g(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(x - \frac{\pi}{4}) = g(x), \forall x \in R.$

13. *Xét hàm số $y = f(x) = \cos\frac{x}{2}$*

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên k, $f(x + k4\pi) = f(x)$ với mọi x.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$ trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$

c) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = \cos x$ và $y = \cos\frac{x}{2}$ trong cùng một hệ tọa độ vuông góc Oxy.

d) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét phép biến hình $\mathcal{F}$ biến mỗi điểm (x; y) thành điểm (x'; y') sao cho x' = 2x và y' = y. Chứng minh rằng $\mathcal{F}$ biến đồ thị của hàm số $y = \cos x$ thành đồ thị của hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$.

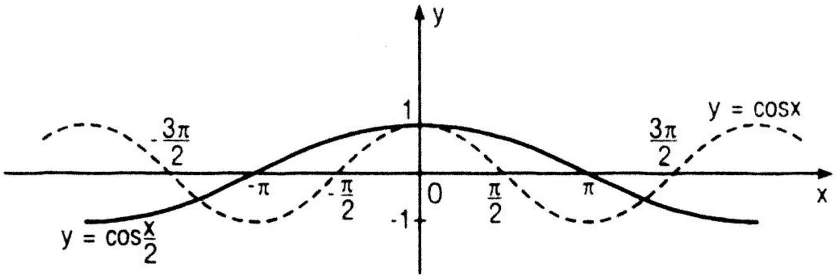
Giải

a) $f(x + k4\pi) = \cos\frac{1}{2}(x + k4\pi) = \cos(\frac{x}{2} + k2\pi) = \cos\frac{x}{2} = f(x)$

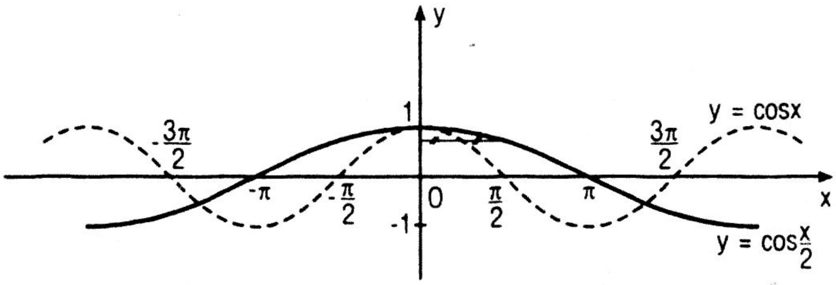
b) Bảng biến thiên :

x	-2π		$-\pi$		0		π		2π
$\frac{x}{2}$	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos\frac{x}{2}$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

c)



d) Nếu đặt x' = 2x, y' = y thì y = cosx khi và chỉ khi $y' = \cos\frac{x'}{2}$. Do đó phép biến đổi xác định bởi (x; y) ↦ (x'; y') sao cho x' = 2x, y' = y biến đồ thị hàm số y = cosx thành đồ thị hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$.



C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Tìm tập xác định của các hàm số sau :*

a) $y = \frac{1-\sin x}{\cos x}$; b) $y = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;

c) $y = \cot(x + \frac{\pi}{3}) - 1$; d) $y = 5\tan(2x - \frac{\pi}{6})$.

ĐS : *a)* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; *b)* $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$;

c) $x \neq -\frac{\pi}{3} + k\pi$; *d)* $x \neq \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$

2. *Xét tính chẵn lẻ của các hàm số :*

a) $y = \sin^4 2x$; b) $y = \frac{\cos x\sin x}{\tan x + \cot x}$;

c) $y = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x}$; d) $y = \sin x - \cos x$.

ĐS : *a) Hàm số chẵn;* *b) Hàm số chẵn;*

c) Hàm số chẵn; *d) Hàm số không chẵn không lẻ.*

3. *Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số :*

a) $y = -5\sin(x - \frac{\pi}{3}) + 1$; b) $y = \sqrt{1+2\cos x} - 3$

ĐS : *a)* $-4; 6$; *b)* $-3; \sqrt{3} - 3$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/ 3002

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

TÓM TẮT GIÁO KHOA

$$\cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

$$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi$$

$$\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi$$

trong đó u, v là các hàm số đối với biến x.

*** Các trường hợp đặc biệt :**

$$\cos u = 0 \Leftrightarrow \sin u = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi$$

$$\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$$

$$\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi$$

$$\sin u = -1 \Leftrightarrow u = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$$

*** Nhớ một số công thức của cung liên kết :**

$$-\sin(u) = \sin(-u) = \sin(\pi + u)$$

$$-\cos(u) = \cos(\pi - u) = \cos(\pi + u)$$

$$-\tan u = \tan(-u)$$

$$-\cot u = \cot(-u)$$

*** Nhớ kết quả :**

$$\sin u + \cos u = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} + u) = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - u)$$

$$\sin u - \cos u = \sqrt{2}\sin(u - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} + u)$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

14. *Giải các phương trình sau :*

a) $\sin 4x = \sin\frac{\pi}{5}$;   b) $\sin\left(\frac{x+\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$;

c) $\cos\frac{x}{2} = \cos\sqrt{2}$;   d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{18}\right) = \frac{2}{5}$.

Giải

a) Ta có $\sin 4x = \sin\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ 4x = \pi - \frac{\pi}{5} + k2\pi \end{array}\right. (k \in Z) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. (k \in Z)$

b) Vì $-\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} = \sin(-\frac{\pi}{6})$ nên :

$$\sin\left(\frac{x+\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x+\pi}{5} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{x+\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{11\pi}{6} + k10\pi \\ x = \frac{29\pi}{6} + k10\pi \end{array}\right. (k \in Z)$$

c) $\cos\frac{x}{2} = \cos\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pm\sqrt{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2} + k4\pi$ $(k \in Z)$

d) Vì $0 < \frac{2}{5} < 1$ nên có số α sao cho $\cos\alpha = \frac{2}{5}$. Do đó :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{18}\right) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{18}\right) = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha - \frac{\pi}{18} + k2\pi,\ k \in Z$$

15. *a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ rồi chỉ ra trên đồ thị đó những điểm có hoành độ thuộc khoảng $(-\pi; 4\pi)$ là nghiệm của mỗi phương trình sau :*

1) $\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$;   2) $\sin x = 1$;

b) Cũng câu hỏi tương tự cho hàm số $y = \cos x$ đối với mỗi phương trình sau :

1) $\cos x = \frac{1}{2}$;   2) $\cos x = -1$

Giải

a) 1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$

* Với $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ và $x \in (-\pi; 4\pi)$ ta có nghiệm :

$x_1 = -\dfrac{\pi}{3}$; $\qquad x_2 = \dfrac{5\pi}{3}$; $\qquad x_3 = \dfrac{11\pi}{3}$

* Với $x = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi$ và $x \in (-\pi; 4\pi)$ ta có nghiệm :

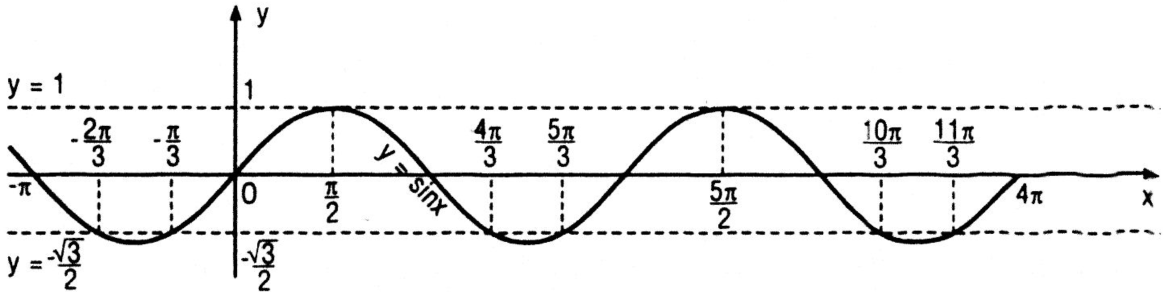
$x_4 = \dfrac{2\pi}{3}$; $\qquad x_5 = \dfrac{4\pi}{3}$; $\qquad x_6 = \dfrac{10\pi}{3}$

2) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

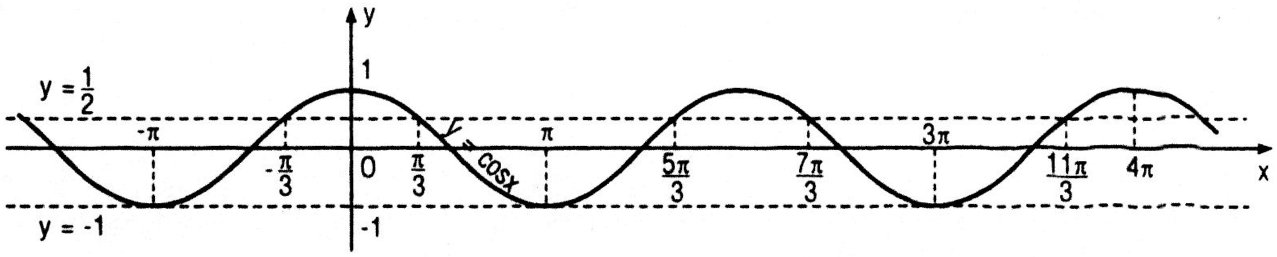
* Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ và $x \in (-\pi; 4\pi)$ ta có nghiệm :

$x_1 = \dfrac{\pi}{2}$; $\qquad x_2 = \dfrac{5\pi}{2}$.

Xem hình vẽ



b) Tương tự câu a) ta có hình vẽ sau :



1) Nghiệm của phương trình $\cos x = \dfrac{1}{2}$ thuộc khoảng $(-\pi; 4\pi)$ là :

$x_1 = -\dfrac{\pi}{3}$; $\quad x_2 = \dfrac{\pi}{3}$; $\quad x_3 = \dfrac{5\pi}{3}$; $\quad x_4 = \dfrac{7\pi}{3}$; $\quad x_5 = \dfrac{11\pi}{3}$.

2) Nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ thuộc khoảng $(-\pi; 4\pi)$ là :

$x_1 = -\pi$; $\quad x_2 = \pi$; $\quad x_3 = 3\pi$.

15. *Tìm nghiệm của các phương trình sau trong khoảng đã cho :*

a) $\sin 2x = -\dfrac{1}{2}$ *với* $0 < x < \pi$; $\qquad$ *b)* $\cos(x - 5) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *với* $-\pi < x < \pi$.

Giải

a) Ta có $\sin 2x = -\dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \sin 2x = \sin(-\dfrac{\pi}{6})$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Với điều kiện $0 < x < \pi$ ta có :

* $0 < -\dfrac{\pi}{12} + k\pi < \pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{12} < k < \dfrac{13}{12}$ vì $k \in Z$

nên $k = 1$, khi đó ta có nghiệm $x = \dfrac{11\pi}{12}$

* $0 < \dfrac{7\pi}{12} + k\pi < \pi \Leftrightarrow -\dfrac{7}{12} < k < \dfrac{5}{12}$ vì $k \in Z$

nên $k = 0$, khi đó ta có nghiệm $x = \dfrac{7\pi}{12}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm trong khoảng $(0; \pi)$ là :

$$x = \frac{7\pi}{12} \text{ và } x = \frac{11\pi}{12}$$

b) $$\cos(x - 5) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 5 = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - 6 = -\dfrac{\pi}{6} + 5 + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 5 + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 5 + k2\pi \end{array}\right.$$

Ta tìm k để điều kiện $-\pi < x < \pi$ được thỏa mãn.

- Xét họ nghiệm thứ nhất :

$$-\pi < \frac{\pi}{6} + 5 + k2\pi < \pi \Leftrightarrow -7\pi - 30 < 12k\pi < 5\pi - 30$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{12} - \frac{30}{12\pi} < k < \frac{5}{12} - \frac{30}{12\pi}$$

Vì $-1,38 < -\dfrac{7}{12} - \dfrac{30}{12\pi} < k < \dfrac{5}{12} - \dfrac{30}{12\pi} < -0,37$ và $k \in Z$ nên

$-1,38 < k < -0,37$

Chỉ có một giá trị k nguyên thỏa mãn các điều kiện đó là $k = -1$.

Ta có nghiệm thứ nhất của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{6} + 5 - 2\pi = 5 - \dfrac{11\pi}{6}$

- Tương tự, xét họ nghiệm thứ hai :

$-\pi < -\dfrac{\pi}{6} + 5 + k2\pi < \pi \Leftrightarrow -5\pi - 30 < 12k\pi < 7\pi - 30$. Vậy $k = -1$

Ta có nghiệm thứ hai của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{6} + 5 - 2\pi = 5 - \dfrac{13\pi}{6}$

Vậy : $x = 5 - \dfrac{11\pi}{6}$ và $x = 5 - \dfrac{13\pi}{6}$

17. *Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số :*

$$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \text{ với } t \in Z \text{ và } 0 < t \le 365.$$

a) Thành phố A có đúng 12 giờ ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm ?

b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất ?

c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất ?

Giải

a) Ta giải phương trình $d(t) = 12$ với $t \in Z$ và $0 < t \le 365$

Ta có $d(t) = 12 \Leftrightarrow \sin[\frac{\pi}{182}(t-80)] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = k\pi$

$\Leftrightarrow t = 182k + 80$ (với $k \in Z$)

Ta lại có $0 < 182k + 80 \le 365 \Leftrightarrow -\frac{80}{182} < k \le \frac{285}{182} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 1 \end{array}\right.$

Vậy thành phố A có đúng 12 giờ ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 80 (ứng với $k = 0$) và ngày thứ 262 (ứng với $k = 1$) trong năm.

b) Do $\sin x \ge -1$ với mọi x nên thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất khi và chỉ khi :

$$\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = -1 \text{ với } t \in Z \text{ và } 0 < t \le 365$$

Phương trình đó cho ta $\frac{\pi}{182}(t-80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow t = 364k - 11$ (với $k \in Z$)

Mặt khác, $0 < 364k - 11 \le 365 \Leftrightarrow \frac{11}{364} < k \le \frac{376}{364} \Leftrightarrow k = 1$ (do k nguyên)

Vậy thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất (9 giờ) khi $t = 353$, tức là vào ngày thứ 353 trong năm.

c) Tương tự, ta phải giải phương trình :

$$\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = 1 \text{ với } t \in Z \text{ và } 0 < t \le 365$$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \Leftrightarrow t = 364k + 171$

$0 < 364k + 171 \le 365 \Leftrightarrow -\frac{171}{364} < k \le \frac{194}{364} \Leftrightarrow k = 0$

Vậy thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất (15 giờ) vào ngày thứ 171 trong năm.

18. *Giải các phương trình sau :*

a) $\tan 3x = \tan\frac{3\pi}{5}$; b) $\tan(x - 15^o) = 5$; c) $\tan(2x - 1) = \sqrt{3}$

d) $\cot 2x = \cot\left(-\frac{1}{3}\right)$; e) $\cot\left(\frac{x}{4} + 20^o\right) = -\sqrt{3}$; f) $\cot 3x = \tan\frac{3\pi}{5}$

Giải

a) $\tan 3x = \tan\frac{3\pi}{5} \Leftrightarrow 3x = \frac{3\pi}{5} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{3}$

b) $\tan(x - 15^o) = 5 \Leftrightarrow x = \alpha + 15^o + k180^o$, trong đó $\tan\alpha = 5$ (chẳng hạn, có thể chọn $\alpha \approx 78^o41'24''$ nhờ dùng máy tính bỏ túi)

c) $\tan(2x - 1) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan(2x - 1) = \tan\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2}$; $k \in Z$

d) $\cot 2x = \cot(-\frac{1}{3}) \Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6} + k\frac{\pi}{2}$

e) $\cot(\frac{x}{4} + 20^o) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot(\frac{x}{4} + 20^o) = \cot(-30^o)$

$\Leftrightarrow \frac{x}{4} + 20^o = -30^o + k180^o \Leftrightarrow x = -200^o + k720^o$

f) $\cot 3x = \tan\frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow \cot 3x = \cot(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}) \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{10} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{30} + k.\frac{\pi}{3}$

19. *a) Vẽ đồ thị hàm số $y = \tan x$ rồi chỉ ra trên các đồ thị đó những điểm có hoành độ thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ là nghiệm của mỗi phương trình sau :*

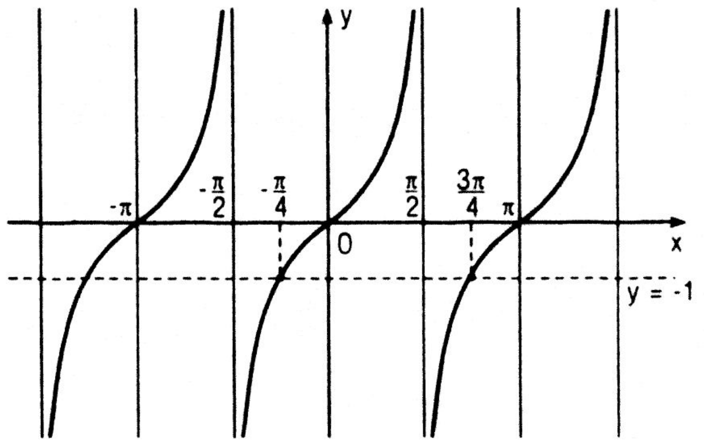
1) $\tan x = -1$; 2) $\tan x = 0$

b) Cũng câu hỏi tương tự cho hàm số $y = \cot x$ cho mỗi hàm số sau :

1) $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\cot x = 1$

Giải

a)

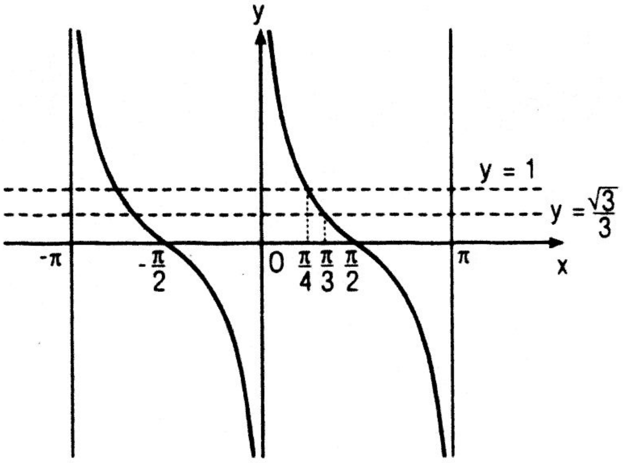


1) Phương trình $\tan x = -1$ có nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ là :

$$x = -\frac{\pi}{4} \text{ và } x = \frac{3\pi}{4}$$

2) Phương trình $\tan x = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ là $x = 0$

b)



1) Phương trình $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ có nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ là :

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ và } x = -\frac{2\pi}{3}$$

2) Phương trình $\cot x = 1$ có nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ là :

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ và } x = -\frac{3\pi}{4}$$

20. *Tìm nghiệm của các phương trình sau trên khoảng đã cho :*

a) $\tan(2x - 15^\circ) = 1$ *với* $-180^\circ < x < 90^\circ$ *;*

b) $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ *với* $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

Giải

a) $\tan(2x - 15^\circ) = 1 \Leftrightarrow 2x = 15^\circ + 45^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ + k90^\circ$

$-180^\circ < 30^\circ + k90^\circ < 90^\circ \Leftrightarrow -2 < \frac{1}{3} + k < 1 \Leftrightarrow k \in \{-2, -1, 0\}$

Vậy các nghiệm của phương trình là $x = -150^\circ$, $x = -60^\circ$ và $x = 30^\circ$.

b) $\cos 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} < 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{6} < k < \frac{1}{3} \Leftrightarrow k \in \{-1; 0\}$

Vậy các nghiệm của phương trình là $x = -\frac{4\pi}{9}$ và $x = -\frac{\pi}{9}$.

21. *Khi giải phương trình $\tan x = -\sqrt{3}$, bạn Phương nhận thấy $-\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ và viết :* $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

Cũng phương trình đó, bạn Quyên lấy $-\sqrt{3} = \tan\frac{2\pi}{3}$ nên giải như sau :

$$\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

Theo em, ai giải đúng, ai giải sai ?

Giải

Cả hai bạn đều giải đúng. Hai họ nghiệm chỉ khác nhau về hình thức, thực chất chỉ là một.

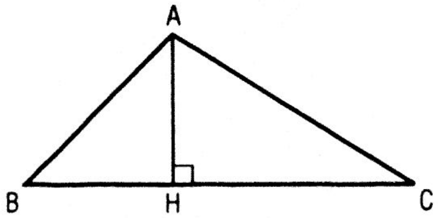
Thực vậy, họ nghiệm $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ có thể viết lại là $x = \frac{2\pi}{3} - \pi + (k+1)\pi$ hay $x = -\frac{\pi}{3} + (k+1)\pi$; đây chính là kết quả mà Phương tìm được.

22. *Tính các góc của tam giác ABC, biết $AB = \sqrt{2}$cm, $AC = \sqrt{3}$cm và đường cao $AH = 1$cm. (Gợi ý : Xét trường hợp B, C nằm khác phía đối với H và trường hợp B, C nằm cùng phía đối với H).*

Giải

Ta xét hai trường hợp :

a) B và C nằm khác phía đối với H



Trong tam giác vuông ABH ta có :

$$\sin B = \frac{AH}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

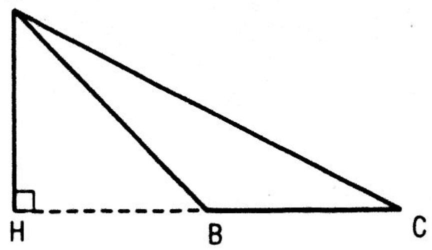
Suy ra $\hat{B} = 45^\circ$ (chú ý rằng góc B nhọn)

Trong tam giác ACH ta có :

$\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, suy ra $\hat{C} \approx 35^\circ15'52''$

Từ đó $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) \approx 99^\circ44'8''$

b) B và C nằm cùng phía đối với H



Tương tự như trên ta có :

$\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ABH} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$,
$\hat{C} \approx 35^\circ15'52''$

Từ đó $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) \approx 9^\circ44'8''$

23. *Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :*

a) $y = \dfrac{1 - \cos x}{2\sin x + \sqrt{2}}$; b) $y = \dfrac{\sin(x - 2)}{\cos 2x - \cos x}$;

c) $y = \dfrac{\tan x}{1 + \tan x}$; d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}\cot 2x + 1}$.

Giải

a) $y = \dfrac{1 - \cos x}{2\sin x + \sqrt{2}}$ xác định $\Leftrightarrow 2\sin x + \sqrt{2} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \sin x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x \neq \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là :

$$D = R \setminus \left(\left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi / k \in Z \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{4} + k2\pi / k \in Z \right\} \right)$$

b) $y = \dfrac{\sin(x - 2)}{\cos 2x - \cos x}$ xác định $\Leftrightarrow \cos 2x \neq \cos x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq x + k2\pi \\ 2x \neq -x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k2\pi \\ 2x \neq k\dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{2\pi}{3}$$

Vậy $D = R \setminus \left\{ k\dfrac{2\pi}{3} / k \in Z \right\}$

c) $y = \dfrac{\tan x}{1 + \tan x}$ xác định $\Leftrightarrow \tan x \neq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

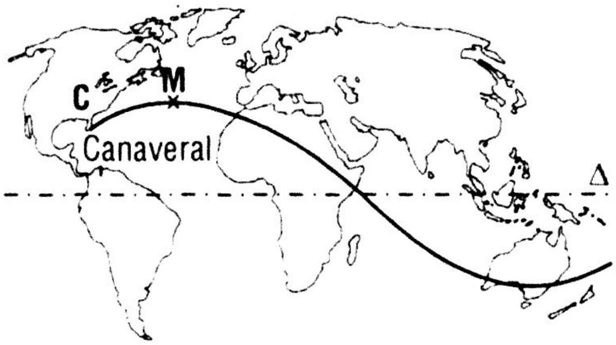
Vậy $D = R \setminus \left(\left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z \right\} \cup \left\{ -\dfrac{\pi}{4} + k\pi / k \in Z \right\} \right)$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}\cot 2x + 1}$ xác định $\Leftrightarrow \cot 2x \neq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq k\pi \\ 2x \neq -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\dfrac{\pi}{2} \\ x \neq -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vậy $D = R \setminus \left(\left\{ k\dfrac{\pi}{2} / k \in Z \right\} \cup \left\{ -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2} / k \in Z \right\} \right)$

24. *Giả sử một con tàu vũ trụ được phóng lên từ mũi Ca–na–vơ–ran (Canaveral) ở Mỹ. Nó chuyển động theo một quỹ đạo được mô tả trên một bản đồ phẳng* *(quanh đường xích đạo) của mặt đất như hình vẽ. Điểm M mô tả cho con tàu, đường thẳng Δ mô tả cho đường xích đạo. Khoảng cách h (kilômet) từ M đến Δ được tính theo công thức h = |d|, trong đó :* $d = 4000\cos\left[\frac{\pi}{45}(t-10)\right]$ *với t (phút) là thời gian trôi qua kể từ khi con tàu đi vào quỹ đạo, d > 0 nếu M ở phía trên Δ, d < 0 nếu M ở phía dưới Δ.*



a) Giả thiết rằng con tàu đi vào quỹ đạo ngay từ khi phóng lên mũi Ca–na–vơ–ran (tức là ứng với t = 0). Hãy tính khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng Δ, trong đó C là điểm trên bản đồ biểu diễn cho mũi Ca–na–vơ–ran.

b) Tìm thời điểm sớm nhất sau khi con tàu đi vào quỹ đạo để có d = 2000.

c) Tìm thời điểm sớm nhất sau khi con tàu đi vào quỹ đạo để có d = – 1236. (Tính chính xác các kết quả đến hàng phần nghìn).

Giải

a) Vì t = 0 nên $d = 4000\cos\left(-\frac{10\pi}{45}\right) = 4000\cos\frac{2\pi}{9}$. Do đó :

$$h = |d| \approx 3064{,}178 \text{ (km)}$$

b) $d = 2000 \Leftrightarrow 4000\cos\left[\frac{\pi}{45}(t-10)\right] = 2000 \Leftrightarrow \cos\left[\frac{\pi}{45}(t-10)\right] = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{45}(t-10) = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow t = 10 \pm 15 + 90k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 25 + 90k \\ t = -5 + 90k \end{array}\right.$$

Chú ý rằng t > 0 ta thấy ngay giá trị nhỏ nhất của t là t = 25. Vậy d = 2000 (km) xảy ra lần đầu tiên sau khi phóng con tàu vào quỹ đạo được 25 phút.

c) $d = -1236 \Leftrightarrow 4000\cos\left[\frac{\pi}{45}(t-10)\right] = -1236 \Leftrightarrow \cos\left[\frac{\pi}{45}(t-10)\right] = -0{,}309$

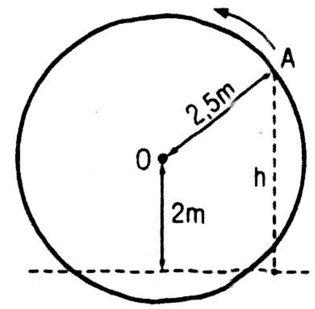
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{45}(t-10) = \pm\alpha + k2\pi \text{ (với } k \in \mathbb{Z} \text{ và } \cos\alpha = -0{,}309)$$

$$\Leftrightarrow t = \pm\frac{45}{\pi}\alpha + 10 + 90k$$

Sử dụng bảng số hoặc máy tính bỏ túi, ta có thể chọn $\alpha \approx 1{,}885$. Khi đó ta có :

$t \approx \pm 27{,}000 + 10 + 90k$, tức là $t \approx -17{,}000 + 90k$ hoặc $t \approx 37{,}000 + 90k$

Dễ thấy giá trị dương nhỏ nhất của t là 37,000. Vậy d = –1236 (km) xảy ra lần đầu tiên là 37,000 phút sau khi con tàu được phóng vào quỹ đạo.



25. *Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5m; trục của nó đặt cách mặt nước 2m. Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) từ một chiếc gầu gắn tại điểm A của guồng đến mặt nước được tính theo công thức h = |y|, trong đó :*

$$y = 2 + 2{,}5\sin\left[2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right]$$

với x là thời gian quay của guồng (x ≥ 0), tính bằng phút; ta quy ước rằng y > 0 khi gầu ở bên trên mặt nước và y < 0 khi gầu ở dưới nước. Hỏi :

a) Khi nào thì chiếc gầu ở vị trí thấp nhất ?

b) Khi nào thì chiếc gầu ở vị trí cao nhất ?

c) Chiếc gầu cách mặt nước 3m lần đầu tiên khi nào ?

Giải

a) Chiếc gầu ở vị trí thấp nhất khi $\sin\left[2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right] = -1$. Ta có :

$$\sin\left[2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right] = -1 \Leftrightarrow 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = k \text{ (với } k \in \mathbb{N})$$

Điều đó chứng tỏ rằng chiếc gầu ở vị trí thấp nhất tại các thời điểm 0 phút; 1 phút; 2 phút; 3 phút...

b) Chiếc gầu ở vị trí cao nhất khi $\sin\left[2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right] = 1$. Ta có :

$$\sin\left[2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right] = 1 \Leftrightarrow 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + k \text{ (với } k \in \mathbb{N})$$

Điều đó chứng tỏ chiếc gàu ở vị trí cao nhất tại các thời điểm 0,5 phút; 1,5 phút; 2,5 phút; 3,5 phút...

c) Chiếc gầu cách mặt nước 2 mét khi $\sin\left[2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right] = 0$, nghĩa là tại các thời điểm $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}k$ (phút); do đó lần đầu tiên nó cách mặt nước 2 mét khi quay được $\frac{1}{4}$ phút (ứng với k = 0).

26. *Dùng công thức biến đổi tổng thành tích, giải các phương trình sau :*

a) cos3x = sin2x ; *b) sin(x – 120°) – cos2x = 0.*

Giải

a) $\cos 3x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}=k\pi\\ \dfrac{5x}{2}-\dfrac{\pi}{4}=k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{10}+k\dfrac{2\pi}{5}\end{array}\right.$$

b) $\sin(x-120^\circ)-\cos2x=0 \Leftrightarrow \cos(210^\circ-x)-\cos2x=0$

$$\Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{x}{2}+105^\circ\right)\sin\left(105^\circ-\frac{3x}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}+105^\circ=k180^\circ\\ 105^\circ-\dfrac{3x}{2}=k180^\circ\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-210^\circ+k360^\circ\\ x=70^\circ+k120^\circ\end{array}\right.$$

BÀI TẬP LÀM THÊM

Giải các phương trình lượng giác :

a) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\left|\sin\frac{3x}{5}\right|=1$;

c) $\sqrt{3}\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-3$;

d) $\tan^2 4x\tan^2 3x=1$

Hướng dẫn :

a) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{19\pi}{60}+k\dfrac{2\pi}{3}\\ x=-\dfrac{11\pi}{60}+k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.$

b) $\left|\sin\frac{3x}{5}\right|=1 \Leftrightarrow \cos\frac{3x}{5}=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{6}+k\frac{5\pi}{3}$

c) $x=k\frac{\pi}{2}$

d) $\tan^2 4x=\cot^2 3x \Leftrightarrow \tan^2 4x=\tan^2\left(\frac{\pi}{2}-3x\right) \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{14}+k\frac{\pi}{7}$

§3. MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN

TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Phương trình bậc nhất và phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác :

Đây là những phương trình bậc nhất hay bậc hai đối với chỉ một hàm số sinx, hoặc cosx, hoặc tanx hoặc cotx.

Cách giải là đặt hàm số lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ nếu có, rồi giải phương trình theo ẩn phụ này.

2. Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx :

$$a\sin x + b\cos x = c \ (1) \ (a^2 + b^2 \neq 0)$$

a) Cách giải thứ nhất :

Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$ *ta được :*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$ *thì* $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$

Đưa phương trình về dạng :

$$\cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ hay } \cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Điều kiện có nghiệm :

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1 \Leftrightarrow c^2 \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow \Delta = a^2 + b^2 - c^2 \geq 0$$

Gọi α *là cung sao cho* $\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Ta có : $\cos(x-\varphi) = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \varphi \pm \alpha + k2\pi$

b) Cách giải thứ hai :

Dùng ẩn phụ $t = \tan\frac{x}{2}$ $(x \neq \pi + k2\pi)$

Trước hết xem $x = \pi + k2\pi$ *có là nghiệm không. Nếu có ta nhận đó là một nghiệm. Nếu* $x = \pi + k2\pi$ *không là nghiệm thì đặt* $t = \tan\frac{x}{2}$

Áp dụng công thức : $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Đưa phương trình về dạng : $(c+a)t^2 - 2bt + c - a = 0$

- *Nếu* $a + c = 0$. *Giải phương trình cơ bản* $\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{c}{b}$
- *Nếu* $c + a \neq 0$, $\Delta' = a^2 + b^2 + c^2$

Nếu $\Delta' \geq 0$ *tức* $a^2 + b^2 \geq c^2$ *phương trình có nghiệm* t_1 *và* t_2

Giải phương trình cơ bản $\tan\dfrac{x}{2} = t_1$; $\tan\dfrac{x}{2} = t_2$

3. Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx :

$$a\sin^2x + b\sin x\cos x + c\cos^2x = 0$$

* *Cách giải :*

Xét xem $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(\cos x = 0)$ *có là nghiệm của phương trình hay không.*

Với $\cos x \neq 0$. *Chia hai vế của phương trình cho* $\cos^2x$ *ta được :*

$$a\tan^2x + b\tan x + c = 0$$

Đặt $t = \tan x$.

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

27. *Giải các phương trình sau :*

a) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$; *b)* $\sqrt{3}\tan 3x - 3 = 0$;

c) $(\sin x + 1)(2\cos 2x - \sqrt{2}) = 0$

Giải

a) Ta có : $2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi, \quad k \in Z$$

b) $\sqrt{3}\tan 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan 3x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan 3x = \tan\dfrac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}\ ;\ k \in Z$$

c) $(\sin x + 1)(2\cos 2x - \sqrt{2}) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + 1 = 0 \\ 2\cos 2x - \sqrt{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \cos 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi \end{array}\right.$$

28. *Giải các phương trình sau :*

a) $2\cos^2x - 3\cos x + 1 = 0$; *b)* $\cos^2x + \sin x + 1 = 0$;

c) $\sqrt{3}\tan^2x - (1 + \sqrt{3})\tan x + 1 = 0$.

Giải

a) Đặt $t = \cos x$, $|t| \le 1$ ta có :

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) Ta có : $\cos^2x + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin^2x + \sin x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin^2x - \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = 2 \ \text{(loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\text{c) } \sqrt{3}\tan^2x - (1 + \sqrt{3})\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

29. *Giải các phương trình sau trên khoảng đã cho rồi dùng bảng số hoặc máy tính bỏ túi để tính gần đúng nghiệm của chúng (tính chính xác đến hàng phần trăm) :*

a) $3\cos 2x + 10\sin x + 1 = 0$ *trên* $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; *b)* $4\cos 2x + 3 = 0$ *trên* $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\cot^2x - 3\cot x - 10 = 0$ *trên* $(0; \pi)$; *d)* $5 - 3\tan 3x = 0$ *trên* $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$

Giải

a) Ta có $3\cos 2x + 10\sin x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow -6\sin^2x + 6\sin x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{3} \\ \sin x = 2 \ \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Phương trình $\sin x = -\frac{1}{3}$ có nghiệm gần đúng là $x \approx -0,34$

b) Ta thấy $0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < 2x < \pi$. Với điều kiện đó, ta có :

$$4\cos 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 2x = \alpha \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2},$$

trong đó α là số thực thuộc khoảng (0; π) thỏa mãn $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$. Dùng bảng số hoặc máy tính, ta tìm được α ≈ 2,42. Từ đó nghiệm gần đúng của phương trình là $x = \frac{\alpha}{2} \approx 1,21$.

c) $\cot^2x - 3\cot x - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot x = 5\\ \cot x = -2\end{array}\right.$

Nghiệm gần đúng của phương trình trong khoảng (0; π) là x ≈ 0,2; x ≈ 2,68

d) $x \in \left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 3x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Với điều kiện đó, ta có :

$$5 - 3\tan3x = 0 \Leftrightarrow \tan3x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow 3x = \beta \Leftrightarrow x = \frac{\beta}{3},$$

trong đó β là số thực thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\tan\beta = \frac{5}{3}$; bảng số hoặc máy tính cho ta β ≈ 1,03. Vậy nghiệm gần đúng của phương trình là x ≈ 0,34.

30. *Giải các phương trình sau :*

a) $3\cos x + 4\sin x = -5$; *b)* $2\sin2x - 2\cos2x = \sqrt{2}$;

c) $5\sin2x - 6\cos^2x = 13$.

Giải

a) Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ta được :

$$\frac{3}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x = -1 \Leftrightarrow \cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha = -1$$

(trong đó $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ và $\sin\alpha = \frac{4}{5}$)

Ta có : $\cos(x - \alpha) = -1 \Leftrightarrow x - \alpha = \pi + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pi + \alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ta được :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin2x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin2x\cos\frac{\pi}{4} - \cos2x\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi\\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{5\pi}{24} + k\pi\\ x = \frac{13\pi}{24} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

c) $5\sin2x - 6\cos^2x = 13 \Leftrightarrow 5\sin2x - 3(1 + \cos2x) = 13$

$\Leftrightarrow 5\sin2x - 3\cos2x = 16$

Chia hai vế cho $\sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ ta được :

$$\frac{5}{\sqrt{34}}\sin2x - \frac{3}{\sqrt{34}}\cos2x = \frac{16}{\sqrt{34}}$$

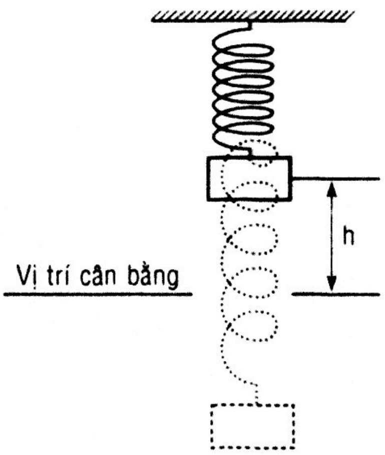
Do $\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)^2 = 1$ nên ta chọn được số α sao cho :

$$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} \text{ và } \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

Ta có : $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13 \Leftrightarrow \sin(2x - \alpha) = \frac{16}{\sqrt{34}} > 1$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

31. *Một vật nặng treo bởi một chiếc lò xo, chuyển động lên xuống qua vị trí cân bằng. Khoảng cách h từ vật đó đến vị trí cân bằng ở thời điểm t giây được tính theo công thức h = |d| trong đó : d = 5sin6t − 4cos6t, với d được tính bằng xentimet, ta quy ước rằng d > 0 khi vật ở phía trên vị trí cân bằng, d < 0 khi vật ở phía dưới vị trí cân bằng. Hỏi :*



a) Ở vào thời điểm nào trong 1 giây đầu tiên, vật ở vị trí cân bằng ?

b) Ở vào thời điểm nào trong 1 giây đầu tiên, vật ở xa vị trí cân bằng nhất ? (Tính chính xác đến $\frac{1}{100}$ giây)

Giải

Ta có : $5\sin 6t - 4\cos 6t = \sqrt{41}\left(\frac{5}{\sqrt{41}}\sin 6t - \frac{4}{\sqrt{41}}\cos 6t\right) = \sqrt{41}\sin(6t - \alpha)$, trong đó số α được chọn sao cho $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$ và $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$. Sử dụng bảng số hoặc máy tính bỏ túi, ta chọn được $\alpha \approx 0{,}675$.

a) Vật ở vị trí cân bằng khi d = 0, nghĩa là $\sin(6t - \alpha) = 0$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\alpha}{6} + k\frac{\pi}{6} \text{ (với } k \in \mathbb{Z})$$

Ta cần tìm k nguyên dương sao cho $0 \le t \le 1$

$$0 \le t \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{\alpha}{6} + k\frac{\pi}{6} \le 1 \Leftrightarrow -\frac{\alpha}{\pi} \le k \le \frac{6 - \alpha}{\pi}$$

Với $\alpha \approx 0{,}675$, ta thu được $-0.215 < k < 1{,}7$, nghĩa là $k \in \{0; 1\}$. Vậy trong khoảng 1 giây đầu tiên, có hai thời điểm vật ở vị trí cân bằng là :

$$t = \frac{\alpha}{6} \approx 0{,}11 \text{ (giây) và } t = \frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{6} \approx 0{,}64 \text{ (giây)}$$

b) Vật ở xa vị trí cân bằng nhất khi và chỉ khi |d| nhận giá trị lớn nhất. Điều đó xảy ra nếu $\sin(6t - \alpha) = \pm 1$. Ta có :

$$\sin(6t - \alpha) = \pm 1 \Leftrightarrow \cos(6t - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6}$$

Ta tìm k nguyên dương sao cho $0 \le t \le 1$

$$0 \le t \le 1 \quad \Leftrightarrow 0 \le \frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6} \le 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{2} \le k \le \frac{6 - \alpha}{\pi} - \frac{1}{2}$$

Với $\alpha \approx 0{,}675$, ta thu được $-0{,}715 < k < 1{,}2$; nghĩa là $k \in \{0; 1\}$. Vậy trong khoảng 1 giây đầu tiên, có hai thời điểm vật ở xa vị trí cân bằng nhất là :

$$t = \frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{12} \approx 0{,}37 \text{ (giây) và } t = \frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} \approx 0{,}90 \text{ (giây)}$$

32. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi biểu thức sau :*

a) asinx + bcosx (a và b là hằng số, $a^2 + b^2 \neq 0$) ;

b) $\sin^2x + \sin x\cos x + 3\cos^2x$;

c) $A\sin^2x + B\sin x\cos x + C\cos^2x$ (A, B và C là hằng số).

Giải

a) Ta có : $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x\right)$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}(\sin x\cos\alpha + \sin\alpha\cos x)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\ \sin(x + \alpha)$$

(trong đó $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$).

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của asinx + bcosx lần lượt là :

$$\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{và} \quad -\sqrt{a^2 + b^2}$$

b) Ta có $\sin^2x + \sin x\cos x + 3\cos^2x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2} + 3.\frac{1 + \cos 2x}{2}$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + \cos 2x + 2$$

Ta có $\left|\frac{1}{2}\sin 2x + \cos 2x\right| \le \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Do đó giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\sin^2x + \sin x\cos x + 3\cos^2x$ lần lượt là : $\frac{\sqrt{5}}{2} + 2$ và $-\frac{\sqrt{5}}{2} + 2$

c) Ta có : $A\sin^2x + B\sin x\cos x + C\cos^2x$

$$= A.\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{B}{2}.\sin 2x + C.\frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$= \frac{B}{2}.\sin 2x + \frac{C - A}{2}\cos 2x + \frac{C + A}{2} = a\sin 2x + b\cos 2x + c$$

trong đó $a = \dfrac{B}{2}$, $\quad b = \dfrac{C-A}{2}$, $\quad c = \dfrac{C+A}{2}$

Vậy $A\sin^2x + B\sin x\cos x + C\cos^2x$ đạt giá trị lớn nhất là :

$$\sqrt{a^2+b^2} + c = \sqrt{\frac{B^2+(C-A)^2}{4}} + \frac{C+A}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{B^2+(C-A)^2} + \frac{C+A}{2}$$

và giá trị nhỏ nhất là $-\dfrac{1}{2}\sqrt{B^2+(C-A)^2} + \dfrac{C+A}{2}$.

33. *Giải các phương trình sau :*

a) $2\sin^2x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2x = 4$;

b) $3\sin^2x + 4\sin 2x + (8\sqrt{3} - 9)\cos^2x = 0$;

c) $\sin^2x + \sin 2x - 2\cos^2x = \dfrac{1}{2}$

Giải

a) $\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình.

Chia hai vế phương trình cho $\cos^2x \neq 0$ ta được :

$$2\tan^2x + 3\sqrt{3}\tan x - 1 = 4(1 + \tan^2x)$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^2x - 3\sqrt{3}\tan x + 5 = 0.$$

Phương trình vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Các giá trị của x mà $\cos x = 0$ không là nghiệm phương trình.

Chia hai vế phương trình cho $\cos^2x$ ta được :

$$3\tan^2x + 8\tan x + 8\sqrt{3} - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -\sqrt{3}\\ \tan x = -\dfrac{8}{3} + \sqrt{3}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi\\ x = \alpha + k\pi\end{array}\right. \quad k \in Z$$

trong đó $\tan\alpha = -\dfrac{8}{3} + \sqrt{3}$

c) Các giá trị của x mà $\cos x = 0$ không là nghiệm phương trình.

Chia hai vế phương trình cho $\cos^2x$ ta được :

$$\tan^2x + 2\tan x - 2 = \frac{1}{2}(1 + \tan^2x)$$

$$\Leftrightarrow \tan^2x + 4\tan x - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = -5\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \alpha + k\pi\end{array}\right. \quad k \in Z$$

trong đó $\tan\alpha = -5$

34. *Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích hoặc tích thành tổng để giải các phương trình sau :*

a) cosxcos5x = cos2xcos4x ; *b) cos5xsin4x = cos3xsin2x;*

c) sin2x + sin4x = sin6x ; *d) sinx + sin2x = cosx + cos2x.*

Giải

a) Ta có : $\cos x\cos 5x = \cos 2x\cos 4x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) \Leftrightarrow \cos 4x = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 2x + k2\pi \\ 4x = -2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = k\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{3}$$

b) $\cos 5x\sin 4x = \cos 3x\sin 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 9x - \sin x) = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)$

$$\Leftrightarrow \sin 9x = \sin 5x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x = 5x + k2\pi \\ 9x = \pi - 5x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{14} + k\dfrac{\pi}{7} \end{array}\right.$$

c) $\sin 2x + \sin 4x = \sin 6x \Leftrightarrow 2\sin 3x\cos x = 2\sin 3x\cos 3x$

$$\Leftrightarrow \sin 3x(\cos x - \cos 3x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ \cos x = \cos 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{3} \\ x = k\pi \\ x = k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{3} \\ x = k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

d) $\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x \Leftrightarrow 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{x}{2} = 0 \\ \sin\dfrac{3x}{2} = \cos\dfrac{3x}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \tan\dfrac{3x}{2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

35. *Dùng công thức hạ bậc để giải các phương trình sau :*

a) $\sin^2 4x + \sin^2 3x = \sin^2 2x + \sin^2 x$;

b) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

Giải

a) $\sin^2 4x + \sin^2 3x = \sin^2 2x + \sin^2 x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 8x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 6x = \cos 4x + \cos 2x \Leftrightarrow \cos 7x\cos x = \cos 3x\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos 7x - \cos 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos 7x = \cos 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\frac{\pi}{2} \\ x = k\frac{\pi}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = k\frac{\pi}{5} \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) Ta có :

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x + \cos 4x) + (\cos 6x + \cos 8x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3x\cos x + 2\cos 7x\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos 3x + \cos 7x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\cos 5x\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos 2x = 0 \\ \cos 5x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

36. *Giải các phương trình sau :*

a) $\tan\frac{x}{2} = \tan x$ *;* *b)* $\tan(2x + 10^\circ) + \cot x = 0$ *;*

c) $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$ *;* *d)* $\tan x + \tan 2x = \sin 3x\cos x$ *;*

e) $\tan x + \cot 2x = 2\cot 4x$*.*

Giải

a) ĐKXĐ : $\begin{cases} \cos\frac{x}{2} \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

Ta có : $\tan\frac{x}{2} = \tan x \Leftrightarrow x = \frac{x}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = k2\pi$ (nhận)

b) ĐKXĐ : $\begin{cases} \cos(2x + 10^\circ) \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$

Ta có : $\tan(2x + 10^\circ) + \cot x = 0 \Leftrightarrow \tan(2x + 10^\circ) = \tan(90^\circ + x)$

$$\Leftrightarrow 2x + 10^\circ = 90^\circ + x + k180^\circ \Leftrightarrow x = 80^\circ + k180^\circ$$

Hiển nhiên $x = 80^\circ + k180^\circ$ thỏa mãn ĐKXĐ.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = 80^\circ + k180^\circ$.

c) Đặt $t = \tan x$, với điều kiện $\cos x \neq 0$.

Ta có $\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \dfrac{2t}{1+t^2}$

Do đó : $1 + \sin 2x = 1 + \dfrac{2t}{1+t^2} = \dfrac{(1+t)^2}{1+t^2}$

Vậy ta có phương trình : $(1-t)\dfrac{(1+t)^2}{1+t^2} = 1 + t$

$$\Leftrightarrow (1-t)(1+t)^2 = (1+t)(1+t^2) \Leftrightarrow 2t^2(1+t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 0 \\ \tan x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$$

d) ĐKXĐ : $\cos x \neq 0$ và $\cos 2x \neq 0$. Với điều kiện đó, ta có :

$$\tan x + \tan 2x = \sin 3x\cos x \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x} = \sin 3x\cos x$$

$$\sin 3x\left(\frac{1}{\cos x\cos 2x} - \cos x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ \dfrac{1}{\cos x\cos 2x} = \cos x \end{array}\right.$$

- $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{3}$
- $\dfrac{1}{\cos x\cos 2x} = \cos x \Leftrightarrow \cos^2 x\cos 2x = 1 \Leftrightarrow (1 + \cos 2x)\cos 2x = 2$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x + \cos 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = k\dfrac{\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$

e) ĐKXĐ : $\cos x \neq 0$, $\sin 2x \neq 0$ và $\sin 4x \neq 0$. Tuy nhiên chỉ cần $\sin 4x \neq 0$ là đủ (vì $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x = 4\sin x\cos x\cos 2x$). Với điều kiện đó ta có :

$$\tan x + \cot 2x = 2\cot 4x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\cos 4x}{\sin 4x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x\sin 2x + \cos x\cos 2x}{\cos x\sin 2x} = \frac{2\cos 4x}{2\sin 2x\cos 2x} \Leftrightarrow \frac{\cos(2x - x)}{\cos x} = \frac{\cos 4x}{\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = \cos 2x \Leftrightarrow 4x = \pm 2x + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = k\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{3}$$

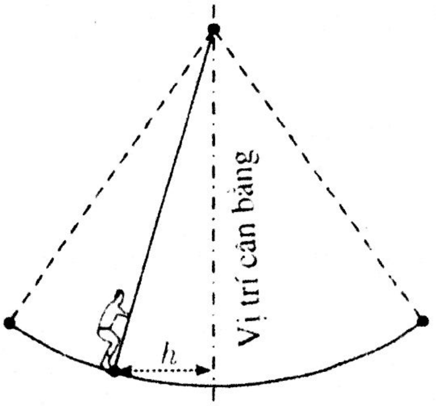
Để là nghiệm, các giá trị này còn phải thỏa mãn điều kiện $\sin 4x \neq 0$. Ta có :

- Nếu k chia hết cho 3, tức là $k = 3m$ $(m \in \mathbb{Z})$ thì $\sin 4x = \sin 4m\pi = 0$
- Nếu k không chia hết cho 3, tức là $k = 3m \pm 1$ $(m \in \mathbb{Z})$ thì :

$$\sin 4x = \sin\left(\pm\frac{4\pi}{3} + 4m\pi\right) = \pm\sin\frac{\pi}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\frac{\pi}{3}$ với k nguyên và không chia hết cho 3.

37. *Mùa xuân ở Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) thường có trò chơi đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động qua lại vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (tính bằng mét) từ người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t ($t \geq 0$ và được tính bằng giây) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t - 1)\right]$, trong đó ta qui ước rằng $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở về phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp trái lại.*



a) Tìm các thời điểm trong vòng 2 giây đầu tiên mà người chơi đu ở xa vị trí cân bằng nhất.

b) Tìm các thời điểm trong vòng 2 giây đầu tiên mà người chơi đu ở cách vị trí cân bằng 2 mét (tính chính xác đến $\frac{1}{100}$ giây)

Giải

a) Người chơi đu ở xa vị trí cân bằng nhất khi $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 1$.

Ta có : $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 1 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t - 1) = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}(3k + 1)$$

Ta cần tìm k nguyên để $0 \leq t \leq 2$

$$0 \leq t \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2}(3k + 1) \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq 1 \Leftrightarrow k \in \{0; 1\}$$

Với $k = 0$ thì $t = \frac{1}{2}$. Với $k = 1$ thì $t = 2$. Vậy trong 2 giây đầu tiên, người chơi đu ở xa vị trí cân bằng nhất vào các thời điểm $\frac{1}{2}$ giây và 2 giây.

b) Người chơi đu cách vị trí cân bằng 2 mét khi $3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 2$.

Ta có : $3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 2 \Leftrightarrow \cos^2\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \frac{4}{9}$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos\left[\frac{2\pi}{3}(2t-1)\right] = \frac{9}{8} \Leftrightarrow \cos\left[\frac{2\pi}{3}(2t-1)\right] = -\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}(2t-1) = \pm\alpha + k2\pi \Leftrightarrow t = \pm\frac{3\alpha}{4\pi} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2} \text{ (với } \cos\alpha = -\frac{1}{9})$$

Ta tìm k nguyên để $0 \le t \le 2$

- Với $t = \frac{3\alpha}{4\pi} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2}$, ta có : $0 \le t \le 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2\pi} \le k \le 1 - \frac{\alpha}{2\pi}$

  Với $\cos\alpha = -\frac{1}{9}$ ta chọn $\alpha \approx 1{,}682$

  Khi đó $-0{,}601 < k < 0{,}732$ suy ra $k = 0$ và $t \approx 0{,}90$

- Với $t = -\frac{3\alpha}{4\pi} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2}$, ta có : $0 \le t \le 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} + \frac{\alpha}{2\pi} \le k \le 1 + \frac{\alpha}{2\pi}$

  Vì $\alpha \approx 1{,}682$ nên $-0{,}066 < k < 1{,}267$, suy ra $k \in \{0; 1\}$

  Với $k = 0$, ta có $t \approx 0{,}10$; với $k = 1$, ta có $t \approx 1{,}60$

Kết luận : Trong khoảng 2 giây đầu tiên, có ba thời điểm mà người chơi đu cách vị trí cân bằng 2 mét, đó là $t \approx 0{,}10$ giây; $t \approx 0{,}90$ giây và $t \approx 1{,}60$ giây.

38. *Giải các phương trình sau :*

a) $\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$; *b)* $(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x + \cot x) = 2$;

c) $\sin x + \sin^2\frac{x}{2} = 0{,}5$.

Giải

a) $\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{3(1-\cos 2x)}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$$

b) Đặt $t = \tan x + \cot x$ với điều kiện $|t| = |\tan x| + |\cot x| \ge 2$ (BĐT Côsi)

Ta có : $t^2 - t = 2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 2 \end{array}\right.$

$$t = 2 \Leftrightarrow \tan x + \cot x = 2 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\tan x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

c) $\sin x + \sin^2\frac{x}{2} = 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \sin x + \frac{1 - \cos x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}\cos x$

$\Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ trong đó $\tan\alpha = \frac{1}{2}$

39. *Chứng minh rằng các phương trình sau đây vô nghiệm :*

a) $\sin x - 2\cos x = 3$; *b) $5\sin 2x + \sin x + \cos x + 6 = 0$*

Hướng dẫn : b) Đặt $\sin x + \cos x = t$

Giải

a) $\sin x - 2\cos x = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\sin x - \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sin(x - \alpha) = \frac{3}{\sqrt{5}}$ trong đó α là số thỏa mãn $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ và $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Phương trình cuối cùng vô nghiệm do $\frac{3}{\sqrt{5}} > 1$, nên phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Trong phương trình $5\sin 2x + \sin x + \cos x + 6 = 0$, ta đặt $t = \sin x + \cos x$ với điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$ thì được phương trình $5t^2 + t + 1 = 0$. Phương trình này vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

40. *Tìm các nghiệm của mỗi phương trình sau trong khoảng đã cho (khi cần tính gần đúng thì tính chính xác đến $\frac{1}{10}$ giây).*

a) $2\sin^2x - 3\cos x = 2$, $0^\circ \le x \le 360^\circ$;

b) $\tan x + 2\cot x = 3$, $180^\circ \le x \le 360^\circ$.

Giải

a) $2\sin^2x - 3\cos x = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2x + 3\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0$ (loại $\cos x = -\frac{3}{2}$)

$\Leftrightarrow x = 90^\circ + k180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$

Vậy với điều kiện $0^\circ \le x \le 360^\circ$, phương trình có hai nghiệm là $x = 90^\circ$ và $x = 270^\circ$.

b) ĐKXĐ : $\sin x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$. Ta có :

$$\tan x + 2\cot x = 3 \Leftrightarrow \tan^2x - 3\tan x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = 2\end{array}\right.$$

- $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = 45^\circ + k180^\circ$. Có một nghiệm thỏa mãn $180^\circ \le x \le 360^\circ$, ứng với $k = 1$ là $x = 225^\circ$.
- $\tan x = 2 \Leftrightarrow x = \alpha + k180^\circ$ với $\tan\alpha = 2$. Ta có thể chọn $\alpha \approx 63^\circ26'5{,}8''$. Vậy có một nghiệm (gần đúng) thỏa mãn $180^\circ \le x \le 360^\circ$ là :

$$x = \alpha + 180^\circ \approx 243^\circ26'5{,}8''$$

Kết luận : Với điều kiện $180^\circ \le x \le 360^\circ$, phương trình có hai nghiệm $x = 225^\circ$ và $x \approx 243^\circ 26' 5{,}8''$.

41. *Giải các phương trình sau :*

a) $3\sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0$; *b)* $3\sin^2 2x - \sin 2x\cos 2x - 4\cos^2 2x = 2$;

c) $2\sin^2 x + (3 + \sqrt{3})\sin x\cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = -1$.

Giải

a) *Cách 1 :* (chia hai vế cho $\cos^2 x$). Chú ý rằng những giá trị của x mà $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình. Do đó :

$$3\sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3\tan^2 x - 2\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra các nghiệm của phương trình là :

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ và } x = \alpha + k\pi \text{ trong đó } \tan\alpha = -\frac{1}{3}$$

Cách 2 : (dùng công thức hạ bậc)

$$3\sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \frac{3(1 - \cos 2x)}{2} - \sin 2x - \frac{1 + \cos 2x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 2x - 4\cos 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x + 2\cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2x + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos(2x - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

trong đó α là số thỏa mãn $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ và $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Ta có :

$$\cos(2x - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow 2x - \alpha = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha - \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

b) Những giá trị của x mà $\cos 2x = 0$ không là nghiệm phương trình. Chia hai vế phương trình cho $\cos^2 2x$ ta được :

$$3\tan^2 2x - \tan 2x - 4 = 2\,(1 + \tan^2 2x)$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 2x - \tan 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan 2x = -2 \\ \tan 2x = 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\alpha}{2} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\beta}{2} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \quad \text{trong đó } \tan 2\alpha = -2 \text{ và } \tan 2\beta = 3$$

c) Với giá trị x mà cosx = 0 không là nghiệm phương trình chia hai vế phương trình cho $\cos^2x$ ta được :

$$2\tan^2x + (3+\sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} - 1 = -(1+\tan^2x)$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^2x + (3+\sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

42. *Giải các phương trình sau :*

a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ *;*

b) $\sin x = \sqrt{2}\sin 5x - \cos x$ *;*

c) $\dfrac{1}{\sin 2x} + \dfrac{1}{\cos 2x} = \dfrac{2}{\sin 4x}$ *;* *d)* $\sin x + \cos x = \dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$.

Giải

a) Ta có : $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\cos 2x\cos x + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) - \cos 2x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x + 1 = 0 \\ \sin 2x - \cos 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{-1}{2} \\ \tan 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right., \quad k \in Z$$

b) $$\sin x = \sqrt{2}\sin 5x - \cos x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 5x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = x + \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ 5x = \dfrac{3\pi}{4} - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right., \quad k \in Z$$

c) ĐKXĐ : $\sin 4x \neq 0$ (điều kiện này đã bao gồm $\sin 2x \neq 0$ và $\cos 2x \neq 0$)).
Với điều kiện đó, ta có thể nhân hai vế của phương trình với $\sin 4x$:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{2}{\sin 4x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{1}{\sin 2x\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = k2\pi \\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$$

Ta thấy : Nếu $2x = k2\pi$ thì $\sin 2x = 0$; nếu $2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ thì $\cos 2x = 0$, nên các giá trị đó của x đều không thỏa mãn ĐKXĐ. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

d) ĐKXĐ : $\sin 2x \neq 1$. Với điều kiện đó, ta có :

$$\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x - \sin x)^2}$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{\cos x - \sin x}\right) = 0$$

- $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$
- $\frac{1}{\cos x - \sin x} = 1 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \text{ (nhận)} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Giải các phương trình :*

a) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$; b) $\cos 2x + 3\sin x = 2$;

c) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$; d) $\tan^3 x - 3\tan^2 x - 2\tan x + 4 = 0$.

Hướng dẫn :

a) *Đặt* $t = \sin x$; $t = \frac{1}{2}$; $t = \frac{1}{3}$; b) *Đặt* $t = \sin x$; $t = 1$; $t = \frac{1}{2}$

c) *Đặt* $t = \cos x$; $t = 0$; $t = -\frac{1}{2}$ d) *Đặt* $t = \tan x$; $t = 1$; $t = 1 \pm\sqrt{5}$

2. *Giải các phương trình sau :*

a) $-\frac{3}{\sin^2 x} + 3\tan^2 x + 4(\tan x + \cot x) - 1 = 0$;

b) $2\cos^2\frac{6x}{5} + 1 = 3\cos\frac{8x}{5}$; c) $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x$.

Hướng dẫn :

a) *Áp dụng công thức :*

$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$, *đặt* $t = \tan x + \cot x$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

b) *Đặt* $t = \cos\frac{4x}{5}$ $(|t| \leq 1)$.

Áp dụng công thức nhân đôi và nhân ba ta được :

$4t^3 - 6t^2 - 3t + 5 = 0$ *có nghiệm* $t = 1$

$\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x = 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^2 2x$$

Đặt $t = \sin^2 2x\ (0 \le t \le 1)$

3. *Giải các phương trình sau :*

a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 7x$; b) $\sin x + \cos x = \cos 2x$;

c) $1 + \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0$; d) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

Hướng dẫn :

a) *Áp dụng kết quả :* $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b) *Áp dụng công thức nhân đôi :* $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Đưa phương trình về tích : $(\sin x + \cos x)(1 + \sin x - \cos x) = 0$

c) *Đưa về tích :* $(1 + \sin x)(1 + \cos x) = 0$

d) *Đưa về tích* $(\sin x + \cos x)(2\cos x + 1) = 0$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

43. *Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?*

a) *Các hàm số* $y = \sin x$, $y = \cos x$ *có cùng tập xác định.*

b) *Các hàm số* $y = \tan x$, $y = \cot x$ *có cùng tập xác định.*

c) *Các hàm số* $y = \sin x$, $y = \tan x$ *là những hàm số lẻ.*

d) *Các hàm số* $y = \cos x$, $y = \cot x$ *là những hàm số chẵn.*

e) *Các hàm số* $y = \sin x$, $y = \cos x$ *cùng nghịch biến trên khoảng* $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

f) *Hàm số* $y = \cos x$ *nghịch biến trên khoảng* $(-2\pi; -\pi)$

g) *Trên mỗi khoảng mà hàm số* $y = \tan x$ *đồng biến thì hàm số* $y = \cot x$ *nghịch biến.*

Trả lời

a) Đúng vì hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ có cùng tập xác định $D = \mathbb{R}$

b) Sai vì $y = \tan x$ xác định $\forall x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$ còn $y = \cot x$ xác định $\forall x \ne k\pi$

c) Đúng

d) Sai vì $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

e) Sai vì $y = \cos x$ không nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

f) Đúng

g) Sai vì trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hàm số $y = \tan x$ đồng biến nhưng hàm số $y = \cot x$ không nghịch biến.

44. *Xét hàm số $y = f(x) = \sin\pi x$*

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên chẵn m ta có $f(x + m) = f(x)$ với mọi x.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số trên đoạn [−1; 1]

c) Vẽ đồ thị hàm số đó.

Giải

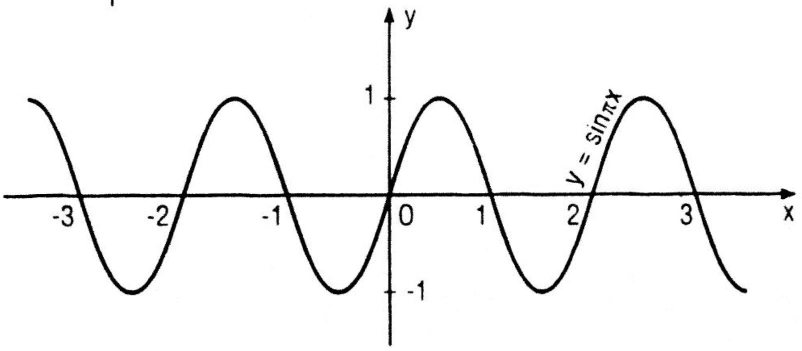
a) Đặt $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ta có :

$$f(x + m) = \sin\pi(x + m) = \sin(\pi x + 2k\pi) = \sin\pi x = f(x)$$

b) Bảng biến thiên :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
y = sinx	↘	↗	↘	

c) Đồ thị



45. *Đưa các biểu thức sau về dạng $C\sin(x + \alpha)$*

a) $\sin x + \tan\frac{\pi}{7}\cos x$; *b) $\tan\frac{\pi}{7}\sin x + \cos x$.*

Giải

a) Ta có : $\sin x + \tan\frac{\pi}{7}\cos x = \sin x + \dfrac{\sin\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}}\cos x$

$$= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}\cos x\right) = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}\sin\left(x + \frac{\pi}{7}\right)$$

b) $$\tan\frac{\pi}{7}\sin x + \cos x = \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}}\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}\left(\sin x\sin\frac{\pi}{7} + \cos x\cos\frac{\pi}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}\cos\left(x - \frac{\pi}{7}\right) = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}\sin\left(x - \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}\sin\left(x + \frac{5\pi}{14}\right)$$

46. *Giải các phương trình sau :*

a) $\sin(x - \frac{2\pi}{3}) = \cos 2x$; b) $\tan(2x + 45^\circ)\tan(180^\circ - \frac{x}{2}) = 1$;

c) $\cos 2x - \sin^2 x = 0$; d) $5\tan x - 2\cot x = 3$.

Giải

a) Ta có : $\sin(x - \frac{2\pi}{3}) = \cos 2x \Leftrightarrow \sin(x - \frac{2\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ x - \frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{6} - k2\pi \end{array}\right.$$

b) Với ĐKXĐ của phương trình ta có $\tan(2x + 45^\circ) = \cot(45^\circ - 2x)$ và $\tan(180^\circ - \frac{x}{2}) = \tan(-\frac{x}{2})$ nên :

$$\tan(2x + 45^\circ)\tan(180^\circ - \frac{x}{2}) = 1 \Leftrightarrow \cot(45^\circ - 2x)\tan(-\frac{x}{2}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan(-\frac{x}{2}) = \tan(45^\circ - 2x) \Leftrightarrow -\frac{x}{2} = 45^\circ - 2x + k180^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 30^\circ + k120^\circ, k \in Z$$

c) Ta có : $\cos 2x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x - \frac{1 - \cos 2x}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow 3\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \cos\alpha \text{ (với } \cos\alpha = \frac{1}{3}) \Leftrightarrow x = \pm\frac{\alpha}{2} + k\pi$$

d) $5\tan x - 2\cot x = 3$. $\Leftrightarrow 5\tan x - \frac{2}{\tan x} = 3$

$$\Leftrightarrow 3\tan^2 x - 3\tan x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -\frac{2}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{array}\right. \text{ trong đó } \tan\alpha = -\frac{2}{5}$$

47. *Giải các phương trình sau :*

a) $\sin 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$; b) $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$;

c) $\sin^2\frac{x}{2} + \sin x - 2\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

Giải

a) Ta có : $\sin 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow 2x = \alpha + k\pi$ với $\tan\alpha = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2} + k\frac{\pi}{2},\ k \in Z$

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ không là nghiệm phương trình.

Chia hai vế phương trình cho $\cos^2x$ ta được :

$$2\tan^2x + 3\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1\\ \tan x = -\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \alpha + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

(với $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$)

c) Ta có : $\sin^2\frac{x}{2} + \sin x - 2\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

* Với x mà $\cos\frac{x}{2} = 0$ không là nghiệm phương trình.

Chia hai vế phương trình cho $\cos^2\frac{x}{2}$ ta được :

$$\tan^2\frac{x}{2} + 2\tan\frac{x}{2} - 2 = \frac{1}{2}(1 + \tan^2\frac{x}{2}) \quad \Leftrightarrow \tan^2\frac{x}{2} + 4\tan\frac{x}{2} - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan\frac{x}{2} = 1\\ \tan\frac{x}{2} = -5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi\\ \frac{\pi}{2} = \alpha + k\pi\end{array}\right. \quad (\text{với } \tan\alpha = -5)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\\ x = 2\alpha + k2\pi\end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

48. *a) Chứng minh rằng* $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

b) Giải phương trình $2\sin x - 2\cos x = 1 - \sqrt{3}$ *bằng cách biến đổi vế trái về dạng* $C\sin(x + \alpha)$

c) Giải phương trình $2\sin x - 2\cos x = 1 - \sqrt{3}$ *bằng cách bình phương hai vế.*

Giải

a) Ta có : $\sin\frac{\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

b) Ta có : $2\sin x - 2\cos x = 1 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos x = -\sin\frac{\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sin(-\frac{\pi}{12}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

c) Chú ý rằng $1 - \sqrt{3} < 0$, ta đặt điều kiện $\sin x - \cos x < 0$ rồi bình phương hai vế của phương trình thì được :

$$4(1 - \sin 2x) = 4 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$$

Thử vào điều kiện $\sin x - \cos x < 0$, ta thấy :

* Họ nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ thỏa mãn điều kiện $\sin x - \cos x < 0$ khi và chỉ khi k chẵn, tức là $x = \frac{\pi}{6} + 2m\pi$ với $m \in Z$.

* Họ nghiệm $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ thỏa mãn điều kiện $\sin x - \cos x < 0$ khi và chỉ khi k lẻ, tức là $x = \frac{\pi}{3} + (2m+1)\pi = \frac{4\pi}{3} + 2m\pi$ với $m \in Z$.

Ta có kết quả như đã nêu ở câu b).

49. *Giải phương trình :*

$$\frac{1+\cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$$

Giải

ĐKXĐ : $\cos x \neq 0$ và $\cos 2x \neq 1$. Với điều kiện đó, ta có :

$$\frac{1+\cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} \Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x}{\cos x} = \frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2\sin x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ (nhận)} \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$

50. *Cho phương trình* $\dfrac{\sin^3x + \cos^3x}{2\cos x - \sin x} = \cos 2x$

a) Chứng minh rằng $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ *nghiệm đúng phương trình ;*

b) Giải phương trình bằng cách đặt $\tan x = t$ *(khi* $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$*).*

Giải

a) Thay $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ vào phương trình ta được :

$\dfrac{(-1)^{3k}}{-(-1)^k} = \cos\pi \Leftrightarrow -1 = -1$ (luôn đúng)

Vậy $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ là nghiệm phương trình.

b) * $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ là nghiệm phương trình

* Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ chia tử và mẫu của vế trái cho $\cos^3x$ ta được :

$$\frac{\tan^3x + 1}{2(1+\tan^2x) - \tan x(1+\tan^2x)} = \frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}$$

Đặt $t = \tan x$ ta được : $\dfrac{t^3+1}{(2-t)(1+t^2)} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\Leftrightarrow t^3 + 1 = (t^2-1)(t-2) \Leftrightarrow t^3 + 1 = t^3 - 2t^2 - t + 2$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{array}\right.$$

với $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm :

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x = \alpha + k\pi \quad (k \in Z).$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả đã cho từ bài 51 đến bài 63.

51. *Giá trị lớn nhất của biểu thức* $\sin^4 x + \cos^4 x$ *là :*

(A) 0 ; *(B)* 1 ; *(C)* 2 ; *(D)* $\frac{1}{2}$.

Trả lời

Chọn (B) vì $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x \le 1$

52. *Giá trị bé nhất của biểu thức* $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ *là :*

(A) -2 ; *(B)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *(C)* -1 ; *(D)* 0.

Trả lời

Ta có : $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3} = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \ge -1$

Chọn (C)

53. *Tập giá trị của hàm số* $y = 2\sin 2x + 3$ *là :*

(A) $[0; 1]$; *(B)* $[2; 3]$; *(C)* $[-2; 3]$; *(D)* $[1; 5]$.

Trả lời

Ta có : $-1 \le \sin 2x \le 1 \Rightarrow 1 \le y \le 5$

Chọn (D)

54. *Tập giá trị của hàm số* $y = 1 - 2|3\sin x|$ *là :*

(A) $[-1; 1]$; *(B)* $[0; 1]$; *(C)* $[-1; 0]$; *(D)* $[-1; 3]$.

Trả lời

Vì $0 \le |\sin 3x| \le 1$ nên $-1 \le y \le 1$

Chọn (A)

55. *Giá trị lớn nhất của biểu thức* $y = \cos^2 x - \sin x$ *là :*

(A) 2 ; *(B)* 0 ; *(C)* $\frac{5}{4}$; *(D)* 1.

Trả lời

Ta có : $y = 1 - \sin^2 x - \sin x = 1 - (\sin^2 x + \sin x)$

$$= \frac{5}{4} - (\sin^2 x + \sin x + \frac{1}{4}) = \frac{5}{4} - (\sin x + \frac{1}{2})^2 \le \frac{5}{4}$$

Chọn (C)

56. *Tập giá trị của hàm số* $y = 4\cos 2x - 3\sin 2x + 6$ *là :*

(A) $[3; 10]$; *(B)* $[6; 10]$; *(C)* $[-1; 13]$; *(D)* $[1; 11]$.

Trả lời

Ta có : $4\cos 2x - 3\sin 2x \quad = 5(\frac{4}{5}\cos 2x - \frac{3}{5}\sin 2x)$

$$= 5(\cos 2x\cos\alpha - \sin 2x\sin\alpha) \text{ với } \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{4}{5} \\ \sin\alpha = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

$= 5\cos(2x + \alpha) \qquad \Rightarrow y = 6 + 5\cos(2x + \alpha) \Rightarrow 1 \le y \le 11$

Chọn (D)

57. *Khi x thay đổi trong khoảng* $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$ *thì* $y = \sin x$ *lấy mọi giá trị thuộc :*

(A) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$; *(B)* $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; *(C)* $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$; *(D)* $[-1; 1]$.

Trả lời

Ta có : $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4} \Rightarrow -1 \le \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -1 \le y < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ chọn (B).

58. *Khi x thay đổi trong khoảng* $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ *thì* $y = \cos x$ *lấy mọi giá trị thuộc :*

(A) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; *(B)* $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; *(C)* $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; *(D)* $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

Trả lời

Ta có $-\frac{\pi}{3} < x \le \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \le \cos x \le 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{2} \le y \le 1$ Chọn (A).

59. *Số nghiệm của phương trình* $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ *thuộc đoạn* $[\pi ; 2\pi]$ *là :*

(A) 1 ; *(B) 2 ;* *(C) 0 ;* *(D)3.*

Trả lời

Ta có : $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

Phương trình không có nghiệm thuộc $[\pi; 2\pi]$

Chọn (C).

60. *Số nghiệm của phương trình* $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ *thuộc đoạn* $[0 ; \pi]$ *là :*

(A) 1 ; *(B) 2 ;* *(C) 3 ;* *(D) 0.*

Trả lời

Ta có : $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi$

Chọn k = 1 ta được nghiệm $x = \frac{5\pi}{8} \in [0; \pi]$

Chọn (A).

61. *Nghiệm của phương trình* $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$ *là :*

(A) $\frac{\pi}{12}$; (B) $\frac{\pi}{3}$; (C) $\frac{\pi}{8}$; (D) $\frac{\pi}{6}$.

Trả lời

Chọn (D). Thử trực tiếp.

62. *Số nghiệm của phương trình* $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ *thuộc khoảng* $(\pi; 8\pi)$ *là :*

(A) 1 ; (B) 3 ; (C) 2 ; (D) 4.

Trả lời

Ta có : $\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Chọn $k \in \{1, 2, 3\}$

Chọn (B)

63. *Số nghiệm của phương trình* $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ *thuộc đoạn* $[2\pi; 4\pi]$ *là :*

(A) 2 ; (B) 4 ; (C) 5 ; (D) 6.

Trả lời

$$\text{Ta có : } \frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos x \neq -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{3} \\ x \neq \pi + k2\pi \end{cases}$$

Chọn $k_1 \in \{6, 7, 8, 10, 11, 12\}$

Chương 2 TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

A. TỔ HỢP

§1. HAI QUI TẮC ĐẾM CƠ BẢN

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Qui tắc cộng :

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo phương án A hoặc phương án B. Có n cách thực hiện phương án A và m cách thực hiện phương án B. Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi n + m cách.

Tổng quát :

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo một trong k phương án $A_1, A_2, .., A_k$. *Có* n_1 *cách thực hiện phương án* A_1, n_2 *cách thực hiện phương án* A_2, ... *và* n_k *cách thực hiện phương án* A_k. *Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi* $n_1 + n_2 + ... + n_k$ *cách.*

2. Qui tắc nhân :

Giả sử một công việc nào đó bao gồm hai công đoạn A và B. Công đoạn A có thể làm theo n cách. Với mỗi cách thực hiện công đoạn A thì công đoạn B có thể làm theo m cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo nm cách.

Tổng quát :

Giả sử một công việc nào đó bao gồm k công đoạn $A_1, A_2, ... A_k$. *Công đoạn* A_1 *có thể thực hiện theo* n_1 *cách, công đoạn* A_2 *có thể thực hiện theo* n_2 *cách,..., công đoạn* A_k *có thể thực hiện theo* n_k *cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo* $n_1 n_2 ... n_k$ *cách.*

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. *Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi bạn có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu và cỡ áo) ?*

Giải

Theo qui tắc cộng ta có 5 + 4 = 9 cách chọn áo sơ mi

2. *Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số của nó đều chẵn ?*

Giải

Chữ số hàng chục có thể chọn trong các chữ số có 2, 4, 6, 8; do đó có 4 cách chọn. Chữ số hàng đơn vị có thể chọn trong các chữ số 0, 2, 4, 6, 8; do đó có 5 cách chọn. Vậy theo quy tắc nhân, ta có 4.5 = 20 số có hai chữ số mà hai chữ số của nó đều chẵn.

3. *Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ.*

a) Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn ?

b) Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn ?

Giải

a) Theo qui tắc cộng, nhà trường có : 280 + 325 = 605 cách chọn

b) Theo qui tắc nhân, nhà trường có : 280 . 325 = 91.000 cách chọn

4. *Từ các chữ số 1, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên ?*

a) Có 4 chữ số (không nhất thiết khác nhau) ?

b) Có 4 chữ số khác nhau ?

Giải

a) Số có 4 chữ số thỏa yêu cầu có dạng $\overline{abcd}$

a có 4 cách chọn, b có 4 cách chọn, c có 4 cách chọn và d có 4 cách chọn.

Vậy theo qui tắc nhân ta có 4.4.4.4 = 256 cách chọn.

b) Số thỏa yêu cầu có dạng $\overline{abcd}$

a và có 4 cách chọn, b có 3 cách chọn, c có 2 cách chọn, d có 1 cách chọn.

Vậy ta có 4.3.2.1 = 24 số cần tìm.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số ?* *ĐS : Có 4.7.6 = 168 số*

2. *Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà cả hai chữ số đều là chẵn ?* *ĐS : Có 5.4 = 20 số*

3. *Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số và chia hết cho 5 ?* *ĐS : Có* $2 . 9 .10^4 = 180.000$ *số*

4. *Từ thành phố A đến thành phố B có 3 con đường, từ thành phố A đến thành phố C có 2 con đường, từ thành phố B đến thành phố D có 2 con đường, từ thành phố C đến thành phố D có 3 con đường. Không có con đường nào nối thành phố B với thành phố C. Hỏi có tất cả bao nhiêu con đường đi từ thành phố A đến thành phố D.* *ĐS : 12*

§2. HOÁN VỊ CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Hoán vị :

Cho tập hợp A có n ($n \geq 1$) phần tử. Khi sắp xếp phần tử này theo một thứ tự, ta được một hoán vị các phần tử của tập A (gọi tắt là một hoán vị của A)

Định lí 1 :

Số các hoán vị của một tập hợp có n phần tử là :

$$\boxed{P_n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots2.1}$$

2. Chỉnh hợp :

a) *Cho tập hợp A gồm n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Khi lấy ra k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự, ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A (gọi tắt là một chỉnh hợp chập k của A).*

b) Định lí 2 :

Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ($1 \leq k \leq n$) là :

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Quy ước : $0! = 1$ và $A_n^0 = 1$

3. Tổ hợp :

a) *Cho tập A có n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A (gọi tắt là một tổ hợp chập k của A).*

b) Định lí 3 :

Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ($1 \leq k \leq n$) là :

$$\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

4. Hai tính chất cơ bản của số C_n^k :

a) Tính chất 1 :

Cho số nguyên dương n và số nguyên k với $0 \leq k \leq n$.
Khi đó $C_n^k = C_n^{n-k}$

b) Tính chất 2 (hằng đẳng thức Pa–xcan) :

Cho các số nguyên n và k với $1 \leq k \leq n$.
Khi đó : $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

5. *Có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với thứ tự giữa các đội trong một giải bóng đá có 5 đội bóng ? (Giả sử rằng không có hai đội nào có điểm trùng nhau).*

Giải

Có $5! = 120$ khả năng

6. *Giả sử có 8 vận động viên tham gia chạy thi. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng một lúc thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí thứ nhất, thứ nhì và thứ ba ?*

Giải

Có $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ kết quả

7. *Trong mặt phẳng cho một tập hợp P gồm n điểm. Hỏi :*

a) Có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai đầu mút thuộc P ?

b) Có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà điểm đầu và điểm cuối thuộc P ?

Giải

a) Giả sử $P = \{A_1; A_2, ..., A_n\}$. Với mỗi tập con $\{A_i; A_j\}$ $(i \neq j)$, ta tạo được đoạn thẳng A_iA_j. Ngược lại, mỗi đoạn thẳng với hai đầu mút là hai điểm A_i, A_j tương ứng với tập con $\{A_i, A_j\}$. Thứ tự hai đầu mút không quan trọng : Đoạn thẳng A_iA_j và đoạn thẳng A_jA_i chỉ là một đoạn thẳng. Vậy số đoạn thẳng mà hai đầu mút là hai điểm thuộc P chính bằng số tổ hợp chập 2 của n phần tử, tức là bằng $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

b) Với mỗi bộ hai điểm có sắp thứ tự (A_i, A_j) $(i \neq j)$, ta tạo được một vectơ $\overrightarrow{A_iA_j}$ ứng với một bộ hai điểm có sắp thứ tự (A_i, A_j), A_i là điểm gốc, A_j là điểm ngọn. Thứ tự hai điểm ở đây là quan trọng vì $\overrightarrow{A_iA_j}$ và $\overrightarrow{A_jA_i}$ là hai vectơ khác nhau. Do đó số vectơ cần tìm bằng số chỉnh hợp chập 2 của n phần tử, tức là bằng $A_n^2 = n(n-1)$.

8. *Trong một Ban chấp hành đoàn gồm 7 người, cần chọn 3 người vào ban thường vụ.*

a) Nếu không có sự phân biệt về chức vụ của 3 người trong ban thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn ?

b) Nếu cần chọn 3 người vào ban thường vụ với các chức vụ : Bí thư, Phó Bí thư, Ủy viên thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn ?

Giải

a) Số cách chọn 3 người mà không có sự phân biệt về chức vụ trong ban thường vụ bằng số tổ hợp chập 3 của 7 phần tử, tức bằng $C_7^3 = 35$ cách chọn.

b) Số cách chọn 3 người với các chức vụ : Bí thư, Phó bí thư, Uỷ viên thường vụ bằng số chỉnh hợp chập 3 của 7 phần tử, tức bằng : $A_7^3 = 210$ cách chọn.

9. *Một bài thi trắc nghiệm khách quan gồm 10 câu. Mỗi câu có 4 phương án trả lời. Hỏi bài thi đó có bao nhiêu phương án trả lời ?*

Giải

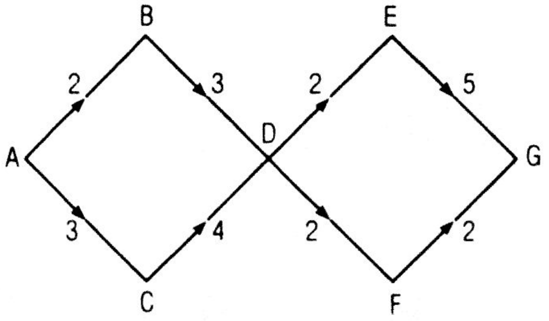
Bài thi có $4^{10} = 1048576$ phương án trả lời.

10. *Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số và chia hết cho 5 ?*

Giải

Một số có 6 chữ số và chia hết cho 5 có dạng $\overline{abcdeg}$ với a có 9 cách chọn, g có hai cách chọn và b, c, d, e mỗi chữ số có 10 cách chọn. Vậy theo qui tắc nhân ta có : $9.10^4.2 = 180000$ số.

11. *Xét mạng đường nối các tỉnh A, B, C, D, E, F, G, trong đó số viết trên một cạnh cho biết số con đường nối hai tỉnh nằm ở hai đầu mút của cạnh. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ tỉnh A đến tỉnh G ?*



Giải

Có 4 phương án đi qua các tỉnh A đến G là :

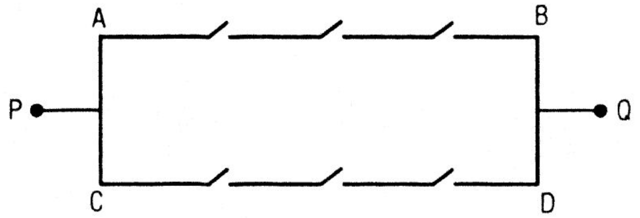
a) A → B → D → E → G;
b) A → B → D → F → G;
c) A → C → D → E → G;
d) A → C → D → F → G.

Theo quy tắc nhân, ta có :

Phương án a) có 2.3.2.5 = 60 cách đi;
Phương án b) có 2.3.2.2 = 24 cách đi;
Phương án c) có 3.4.2.5 = 120 cách đi;
Phương án d) có 3.4.2.2 = 48 cách đi.

Theo quy tắc cộng, ta có cả thảy 60 + 24 + 120 + 48 = 252 cách đi từ A đến G.

12. *Xét sơ đồ mạng điện ở hình dưới có 6 công tắc khác nhau, trong đó mỗi công tắc có 2 trạng thái đóng và mở. Hỏi có bao nhiêu cách đóng – mở 6 công tắc để mạng điện thông mạch từ P đến Q (tức là có dòng điện từ P đến Q) ?*



Giải

Mỗi cách đóng – mở 6 công tắc của mạng điện được gọi là một trạng thái của mạng điện. Theo quy tắc nhân, mạng điện có $2^6 = 64$ trạng thái. Trước hết, ta tìm xem có bao nhiêu trạng thái không thông mạch (không có dòng điện đi qua). Mạch gồm hai nhánh A → B và C → D. Trạng thái không thông mạch xảy ra khi và chỉ khi cả hai nhánh A → B và C → D đều không thông mạch. Dễ thấy nhánh A → B có 8 trạng thái trong đó chỉ có duy nhất một trạng thái thông mạch, còn lại có 7 trạng thái không thông mạch. Tương tự ở nhánh C → D có 7 trạng thái không thông mạch. Theo quy tắc nhân, ta có $7.7 = 49$ trạng thái mà cả A → B và C → D đều không thông mạch. Vậy mạng điện có $64 - 49 = 15$ trạng thái thông mạch từ P tới Q.

13. *Một cuộc thi có 15 người tham dự, giả thiết rằng không có hai người nào có điểm bằng nhau.*

a) Nếu kết quả cuộc thi là việc chọn ra 4 người điểm cao nhất thì có bao nhiêu kết quả có thể ?

b) Nếu kết quả cuộc thi là việc chọn ra các giải nhất, nhì, ba thì có bao nhiêu kết quả có thể ?

Giải

a) Số cách chọn ra 4 người điểm cao nhất trong 15 người tham dự là số tổ hợp chập 4 của 15 phần tử. Vậy kết quả cần tìm là $C_{15}^4 = 1365$.

b) Số cách chọn ra 3 giải nhất, nhì, ba là số chỉnh hợp chập 3 của 15 phần tử. Vậy kết quả cần tìm là $A_{15}^3 = 2730$.

14. *Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có bốn giải : 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi :*

a) Có bao nhiêu kết quả có thể ?

b) Có bao nhiêu kết quả có thể, nếu biết rằng người giữ vé số 47 được giải nhất ?

c) Có bao nhiêu kết quả có thể, nếu biết rằng người giữ vé số 47 trúng một trong 4 giải ?

Giải

a) Có $A_{100}^4 = 94109400$ kết quả có thể.

b) Nếu giải nhất đã xác định thì 3 giải nhì, ba, tư sẽ rơi vào 99 người còn lại. Vậy có $A_{99}^3 = 941094$ kết quả có thể.

c) Người giữ vé số 47 có 4 khả trúng một trong 4 giải. Sau khi xác định giải của người này thì 3 giải còn lại sẽ rơi vào 99 người không giữ vé số 47. Vậy có A_{99}^3 khả năng. Theo quy tắc nhân, ta có $4.A_{99}^3 = 3764376$ kết quả có thể.

15. *Một tổ có 8 em nam và 2 em nữ. Người ta cần chọn ra 5 em trong tổ tham dự cuộc thi học sinh thanh lịch của trường. Yêu cầu trong các em được chọn, phải có ít nhất một em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?*

Giải

Số cách chọn 5 em trong 10 em là C_{10}^5. Số cách chọn 5 em toàn nam là C_8^5. Do đó số cách chọn có ít nhất một nữ là $C_{10}^5 - C_8^5 = 196$.

16. *Một nhóm học sinh có 7 em nam và 3 em nữ. Người ta cần chọn ra 5 em trong nhóm tham gia đồng diễn thể dục. Trong 5 em được chọn, yêu cầu không có quá một em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?*

Giải

Số cách chọn 5 em toàn nam là C_7^5. Số cách chọn 4 nam và 1 nữ là $C_7^4C_3^1$. Vậy đáp số bài toán là : $C_7^5 + C_7^4C_3^1 = 126$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *a) Tìm tổng tất cả các số có 3 chữ số 1, 2, 3 (không có chữ số nào trùng nhau)*
b) Tìm tổng tất cả các số có 4 chữ số khác nhau 1, 3, 5, 7.

Hướng dẫn : a) Có 6 số là hoán vị của 1, 2, 3; S = 1332
b) Tương tự.

2. *Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng 1 lần ?*

Hướng dẫn : Xét 8 chữ số $0, 1_a, 1_b, 1_c, 2, 3, 4, 5$
Có $8! - 7! = 7.7!$ số có 8 chữ số nếu xem $1_a, 1_b, 1_c$ là khác nhau đôi một.
Nhưng vì $1_a = 1_b = 1_c = 1$ nên số các số trên giảm $3! = 6$ lần.
ĐS : $\dfrac{7.7!}{3!} = 5880$ số.

3. *Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau và trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5.*

Hướng dẫn :
- *Số có dạng $\overline{abcde}$ $(a \neq 0)$*
- *Với $a = 5$ có A_6^4 số*
- *Với $a \neq 0$ có $4.5\ A_{10}^6$ cách chọn.*

Vậy có $A_{10}^6 + 20A_{10}^6 = 1560$ số

4. *Trong không gian cho 9 điểm trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tứ diện với các đỉnh là các điểm đã cho.*

ĐS : $C_9^4 = 126$

5. *Một tổ chức gồm 9 nam và 3 nữ. Giáo viên muốn chọn 4 học sinh để trực. Có bao nhiêu cách chọn nếu :*

A) Chọn học sinh nào cũng được ; *B) Chọn đúng một nữ ;*

C) Chọn ít nhất một nữ.

ĐS : a) $C_{12}^4 = 495$; *b)* $C_3^1.C_9^3 = 252$; *c) 369.*

§3. NHỊ THỨC NIU-TƠN

TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Công thức nhị thức Niu-tơn :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

2. Tam giác Pa-xcan :

Muốn khai triển $(a+b)^n$ *thành đa thức, ta cần biết* $n+1$ *số* $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n$ *có mặt trong công thức nhị thức Niu-tơn. Các số này có thể tính được nhờ công thức ở §2. Ngoài ra còn có thể tìm được chúng bằng cách sử dụng bảng số sau đây :*

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙

1 6 15 20 15 6 1

……………………………………………

Tam giác Pa-xcan được lập theo quy luật sau :

– Đỉnh được ghi số 1. Tiếp theo là hàng thứ nhất ghi hai số 1.

– Nếu biết hàng thứ n (n ≥ 1) thì hàng thứ n + 1 tiếp theo được thiết lập bằng cách cộng hai số liên tiếp của hàng thứ n rồi viết kết quả xuống hàng dưới ở vị trí giữa hai số này. Sau đó viết số 1 ở đầu và cuối hàng.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

17. *Tìm hệ số của* $x^{101}y^{99}$ *trong khai triển* $(2x-3y)^{200}$

Giải

Ta có : $(2x-3y)^{200} = \sum_{k=0}^{200} C_{200}^{k}(2x)^{200-k}(-3y)^{k}$

Số hạng chứa $x^{101}y^{99}$ ứng với $k = 99$, đó là : $C_{200}^{99}(2x)^{101}(-3y)^{99}$

Vậy hệ số của $x^{101}y^{99}$ là $-C_{200}^{99}2^{101}3^{99}$

18. *Tính hệ số của* x^5y^8 *trong khai triển* $(x+y)^{13}$

Giải

Ta có : $(x+y)^{13} = \sum_{k=0}^{13} C_{13}^{k}x^{13-k}y^{k}$

Số hạng chứa x^5y^8 ứng với $k = 8$ đó là $C_{13}^{8}x^5y^8$.

Vậy hệ số của x^5y^8 là $C_{13}^{8} = 1287$

19. *Tính hệ số của* x^7 *trong khai triển* $(1+x)^{11}$

Giải

Hệ số x^7 trong khai triển $(1+x)^{11}$ là $C_{11}^{7} = 330$

20. *Tính hệ số của* x^9 *trong khai triển* $(2-x)^{19}$

Giải

Ta có $(2-x)^{19} = \sum_{k=0}^{19} C_{19}^{k}2^{19-k}(-x)^{k}$

Hệ số của x^9 là $-C_{19}^{9}2^{10} = -94595072$ (ứng với $k = 9$)

21. *Khai triển* $(3x+1)^{10}$ *cho tới* x^3

Giải

Ta có : $(3x+1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k}(3x)^{k} = 1 + C_{10}^{1}(3x) + C_{10}^{2}(3x)^2 + C_{10}^{3}(3x)^3 + \ldots$

$= 1 + 30x + 405x^2 + 3240x^3 + \ldots$

22. *Tìm hệ số của* x^7 *trong khai triển của* $(3-2x)^{15}$

Giải

Ta có $(3-2x)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k}x^{15-k}(-2x)^{k}$

Hệ số của x^7 là $C_{15}^{7}.3^8(-2)^7 = -C_{15}^{7}.3^8.2^7$ (ứng với $k = 7$)

23. *Tính hệ số của* $x^{25}y^{10}$ *trong khai triển của* $(x^3+xy)^{15}$

Giải

Ta có : $(x^3 + xy)^{15} = \sum\limits_{k=0}^{15} C_{15}^{k} (x^3)^{15-k} (xy)^k$

Số hạng chứa $x^{25}y^{10}$ ứng với k = 10 đó là :

$$C_{15}^{10}(x^3)^5(xy)^{10} = C_{15}^{10}x^{25}y^{10}$$

Vậy hệ số của $x^{25}y^{10}$ là $C_{15}^{10} = 3003$

24. *Biết rằng hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x - \frac{1}{4}\right)^n$ bằng 31. Tìm n.*

Giải

Ta có : $\left(x - \frac{1}{4}\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}\left(-\frac{1}{4}\right)^k$

Hệ số của x^{n-k} là $C_n^2\left(\frac{-1}{4}\right)^2 = 31 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 16.31 \Rightarrow n = 32$

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Tìm số hạng không chứa x của khai triển $\left(x + \frac{1}{x^4}\right)^{10}$*

ĐS : $C_{10}^2 = 45$

2. *Tìm số hạng không chứa căn thức trong khai triển $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^5$*

ĐS : $C_5^2 = 10$

3. *Trong khai triển $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^n$ tìm số hạng không chứa x biết :*

$$C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$$

ĐS : n = 12; C_{12}^5

B. XÁC SUẤT

§4. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Biến cố :

a) Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu :

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà :

- *Kết quả của nó không dự đoán trước được;*
- *Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.*
- *Phép thử thường được kí hiệu bởi chữ T.*
- *Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và được kí hiệu bởi Ω (đọc là ô-mê-ga)*

b) Biến cố :

Biến cố A liên quan đến phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của A tùy thuộc vào kết quả của T.

Mỗi kết quả của phép thử T làm cho A xảy ra, được gọi là một kết quả thuận lợi cho A.

Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu là Ω_A. Khi đó người ta nói biến cố A được mô tả bởi tập Ω_A.

2. Xác suất của biến cố :

a) Định nghĩa cổ điển của xác suất :

Định nghĩa :

Giả sử phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng. Nếu A là một biến cố liên quan với phép thử T và Ω_A là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A thì xác suất của A là một số, kí hiệu là P(A), được xác định bởi công thức :

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$$

Như vậy, việc tính xác suất của biến cố A trong trường hợp này được qui về việc đếm số kết quả có thể của phép thử T và số kết quả thuận lợi cho A.

Chú ý :

Từ định nghĩa trên ta suy ra :

- $0 \le P(A) \le 1$
- $P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$

b) Định nghĩa thống kê của xác suất :

Số lần xuất hiện của biến cố A được gọi là tần số của A trong N lần thực hiện phép thử T.

Tỉ số giữa tần số của A với số N được gọi là tần suất của A trong N lần thực hiện phép thử T.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

25. *Chọn ngẫu nhiên số nguyên dương không lớn hơn 50.*

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Gọi A là biến cố "Số được chọn là số nguyên tố". Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi cho A.

c) Tính xác suất của A.

d) Tính xác suất để số được chọn nhỏ hơn 4.

Giải

a) Không gian mẫu $\Omega = \{1,2,3,...,50\}$

b) Kết quả thuận lợi cho A là :

$\Omega_A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$

c) Xác suất của A là $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{15}{50} = \dfrac{3}{10}$

d) Xác suất để số được chọn nhỏ hơn 4 là : $P(B) = \dfrac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \dfrac{3}{50}$

26. *Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 9. Tính xác suất để :*

a) Số được chọn là số nguyên tố ; *b) Số được chọn chia hết cho 3.*

Giải

Không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

a) A là biến cố "số được chọn là số nguyên tố"

Ta có : $\Omega_A = \{2, 3, 5, 7\}$

Xác suất để số được chọn là số nguyên tố :

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5$$

b) Gọi B là biến cố "số được chọn chia hết cho 3"

Ta có : $\Omega_B = \{3, 6\}$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

27. *Danh sách lớp của Hường được đánh số từ 1 đến 30. Hường có số thứ tự là 12. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp.*

a) Tính xác suất để Hường được chọn.

b) Tính xác suất để Hường không được chọn.

c) Tính xác suất để một bạn có số thứ tự nhỏ hơn số thứ tự của Hường được chọn.

Giải

a) Gọi A là biến cố "Hường được chọn"

Ta có $P(A) = \dfrac{1}{30}$

b) Gọi B là biến cố "Hường không được chọn"

Ta có $P(B) = \dfrac{29}{30}$

c) Gọi C là biến cố : "Bạn có số thứ tự nhỏ hơn 12 được chọn".

Ta có $P(C) = \dfrac{11}{30}$

28. *Gieo hai con súc sắc cân đối.*

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Gọi A là biến cố "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc nhỏ hơn hoặc bằng 7". Liệt kê các kết quả thuận lợi cho A. Tính P(A).

c) Cũng hỏi như trên cho các biến cố B : "Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm" và C : "Có đúng một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm".

Giải

a) $\Omega = \{a; b\} \mid a, b \in \mathbb{N}^*, 1 \le a \le 6, 1 \le b \le 6\}$.

Không gian mẫu có 36 phần tử.

b) $\Omega_A = \{(6; 1), (5; 1), (5; 2), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4); (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6)\}$.

Tập Ω_A có 21 phần tử. Vậy $P(A) = \dfrac{21}{36} = \dfrac{7}{12}$

c) $\Omega_B = \{(6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (6; 6), (1; 6), (2; 6), (3; 6), (4; 6), (5; 6)$.

Tập Ω_B có 11 phần tử. Vậy $P(B) = \dfrac{11}{36}$

$\Omega_C = \{(6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (1; 6), (2; 6), (3; 6), (4; 6), (5; 6)\}$.

Tập Ω_C có 10 phần tử. Do đó $P(C) = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$.

29. *Chọn ngẫu nhiên 5 người có tên trong một danh sách 20 người được đánh số từ 1 đến 20. Tính xác suất để 5 người được chọn có số thứ tự không lớn hơn 10 (tính chính xác đến hàng phần nghìn).*

Giải

Số kết quả có thể là C_{20}^5. Số kết quả thuận lợi là số cách chọn 5 số trong tập [1, 2,...10]. Do đó, số kết quả thuận lợi là C_{10}^5. Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{C_{10}^5}{C_{20}^5} \approx 0{,}016$.

30. *Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh có tên trong một danh sách được đánh số thứ tự từ 001 đến 199. Tính xác suất để 5 học sinh này có số thứ tự :*

a) Từ 001 đến 099 (tính chính xác đến hàng phần nghìn).

b) Từ 150 đến 199 (tính chính xác đến hàng phần vạn).

Giải

a) Số kết quả có thể là C_{199}^5. Số kết quả thuận lợi là C_{99}^5.

Xác suất cần tìm là $\dfrac{C_{99}^5}{C_{199}^5} \approx 0{,}029$.

b) Số kết quả thuận lợi là C_{50}^5.

Xác suất cần tìm là $\dfrac{C_{50}^5}{C_{199}^5} \approx 0{,}0009$.

31. *Một cái túi có 4 quả cầu đỏ, 6 quả cầu xanh. Chọn ngẫu nhiên 4 quả cầu. Tính xác suất để trong bốn quả đó có cả quả màu đỏ và màu xanh.*

Giải

Số kết quả có thể $C_{10}^4 = 210$. Số cách chọn toàn quả cầu đỏ là $C_4^4 = 1$. Số cách chọn toàn quả cầu xanh là $C_6^4 = 15$. Do đó số cách chọn trong đó có cả quả cầu xanh và quả cầu đỏ là $210 - 15 - 1 = 194$. Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{194}{210} = \dfrac{97}{105}$.

32. *Chiếc kim của bánh xe trong trò chơi "Chiếc nón kì diệu" có thể dừng lại ở một trong 7 vị trí với khả năng như nhau. Tính xác suất để trong ba lần quay, chiếc kim của bánh xe đó lần lượt dừng lại ở ba vị trí khác nhau.*

Giải

Số kết quả có thể là $7^3 = 343$. Số kết quả thuận lợi là $A_7^3 = 210$. Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{210}{343} = \dfrac{30}{49}$.

33. *Gieo đồng thời hai con súc sắc cân đối. Tính xác suất để số chấm xuất hiện trên hai con súc sắc hơn kém nhau 2.*

Giải

Số kết quả có thể là 36. Có 8 kết quả thuận lợi là : (1; 3), (2; 4), (3; 5), (4; 6) và các hoán vị của nó.

Vậy xác suất cần tìm là $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Một hộp đựng 10 viên bi trong đó có 6 viên bi màu xanh và 4 viên bi màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 3 viên bi. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có :*

a) Cả 3 viên đều là bi màu xanh.

b) Ít nhất 1 viên bi là màu xanh.

ĐS : a) $\frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$; *b)* $1 - \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$.

2. *Trong một hộp có 12 bóng đèn giống nhau, trong đó có 4 bóng hỏng. Lấy ngẫu nhiên ra 3 bóng. Tính xác suất để :*

a) Được 3 bóng tốt.

b) Được 3 bóng hỏng.

c) Được đúng 1 bóng tốt.

ĐS : a) $\frac{C_8^3}{C_{12}^3}$; *b)* $\frac{C_4^3}{C_{12}^3}$; *c)* $\frac{C_8^1 . C_4^2}{C_{12}^3}$.

§5. CÁC QUI TẮC TÍNH XÁC SUẤT

TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Qui tắc cộng xác suất :

a) Biến cố hợp :

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu là $A \cup B$, được gọi là hợp của hai biến cố A và B.

Nếu Ω_A và Ω_B lần lượt là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A và B thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho $A \cup B$ là $\Omega_A \cup \Omega_B$.

Tổng quát :

Cho k biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Biến cố "Có ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, \ldots A_k$ xảy ra", kí hiệu là $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$, được gọi là hợp của k biến cố đó.

b) Biến cố xung khắc :

Cho hai biến cố A và B. Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu và chỉ nếu $\Omega_A \cap \Omega_B = \varnothing$.

c) Quy tắc cộng xác suất :

Nếu hai biến cố A và B xung khắc, thì xác suất để A hoặc B xảy ra là :

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (1)}$$

Tổng quát :

Cho k biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ đôi một xung khắc. Khi đó :

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k) \quad (2)}$$

d) Biến cố đối :

Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "Không xảy ra A", kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là biến cố đối của A.

Nếu Ω_A là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho $\overline{A}$ là $\Omega \setminus \Omega_A$. Ta nói A và $\overline{A}$ là hai biến cố đối nhau.

Định lí :

Cho biến cố A. Xác suất của biến cố đối $\overline{A}$ là :

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad (3)}$$

2. Quy tắc xác suất :

a) Biến cố giao :

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "Cả A và B cùng xảy ra", kí hiệu là AB, được gọi là giao của hai biến cố A và B.

Nếu Ω_A *và* Ω_B *lần lượt là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A và B thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho AB là* $\Omega_A \cap \Omega_B$.

Tổng quát :

Cho k biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$. *Biến cố "Tất cả k biến cố* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *đều xảy ra", kí hiệu là* $A_1A_2, \ldots, A_k$ *được gọi là giao của k biến cố đó.*

b) Biến cố độc lập :

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Tổng quát :

Cho k biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$; *k biến cố này được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra của mỗi biến cố không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của các biến cố còn lại.*

c) Quy tắc nhân xác suất :

Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì :

$$\boxed{P(AB) = P(A)P(B) \qquad (4)}$$

Tổng quát :

Nếu k biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *độc lập với nhau thì :*

$$\boxed{P(A_1.A_2\ldots\ldots A_k) = P(A_1)P(A_2) \;\ldots\; P(A_k) \; (5)}$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

34. *Gieo ba đồng xu cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để :*

a) Cả ba đồng xu đều sấp ; *b) Có ít nhất một đồng xu sấp;*

c) Có đúng một đồng xu sấp.

Giải

a) Gọi A_i là biến cố "Đồng xu thứ i sấp" (i = 1, 2, 3), ta có $P(A_i) = \frac{1}{2}$. Các biến cố A_1, A_2, A_3 độc lập. Theo quy tắc nhân xác suất, ta có : $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}$

b) Gọi H là biến cố "Có ít nhất một đồng xu sấp". Biến cố đối của biến cố H là $\overline{H}$: "Cả ba đồng xu đều ngửa". Tương tự như câu a) ta có $P(\overline{H}) = \frac{1}{8}$. Vậy :

$$P(H) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

c) Gọi K là biến cố "Có đúng một đồng xu sấp". Ta có :

$K = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

Theo quy tắc cộng xác suất, ta có :

$P(K) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$

Theo quy tắc nhân xác suất, ta tìm được :

$P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = \frac{1}{8}$.

Tương tự $P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = \frac{1}{8}$. Từ đó $P(K) = \frac{3}{8}$

35. *Xác suất bắn trúng hồng tâm của một người bắn cung là 0,2. Tính xác suất để trong ba lần bắn độc lập :*

a) Người đó bắn trúng hồng tâm đúng một lần;

b) Người đó bắn trúng hồng tâm ít nhất một lần.

Giải

a) Gọi A_i là biến cố "Người bắn cung bắn trúng hồng tâm ở lần thứ i" (i = 1, 2, 3), ta có $P(A_i) = 0,2$. Gọi K là biến cố "Trong ba lần bắn có duy nhất một lần người đó bắn trúng hồng tâm", ta có : $K = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

Theo qui tắc cộng xác suất, ta có :

$P(K) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$.

Theo qui tắc nhân xác suất ta có :

$P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 0,2.0,8.0,8 = 0,128$.

Tương tự $P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = 0,128$.

Vậy $P(K) = 3.0,128 = 0,384$.

b) Gọi H là biến cố "Trong ba lần bắn, người đó bắn trúng hồng tâm ít nhất một lần". Biến cố đối của biến cố H là $\overline{H}$ "Cả ba lần bắn, người đó đều bắn không trúng hồng tâm". Ta có : $\overline{H} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

Theo quy tắc nhân xác suất, ta có :

$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 0,8 \;.\; 0,8 \;.\; 0,8 = 0,512$

Vậy $p(H) = 1 - P(\overline{H}) = 1 - 0,512 = 0,488$.

36. *Gieo hai đồng xu A và B một cách độc lập. Đồng xu A chế tạo cân đối. Đồng xu B chế tạo không cân đối nên xác suất xuất hiện mặt sấp gấp ba lần xác suất xuất hiện mặt ngửa. Tính xác suất để :*

a) Khi gieo hai đồng xu một lần thì cả hai đồng xu đều ngửa;

b) Khi gieo hai đồng xu hai lần thì cả hai đồng xu đều ngửa.

Giải

Gọi A_1 là biến cố "Đồng xu A sấp", A_2 là biến cố "Đồng xu A ngửa", B_1 là biến cố "Đồng xu B sấp", B_2 là biến cố "Đồng xu B ngửa".

Theo bài ra ta có : $P(A_1) = P(A_2) = 0{,}5$; $P(B_1) = 0{,}75$; $P(B_2) = 0{,}25$

a) A_2B_2 là biến cố "Cả hai đồng xu A và B đều ngửa". Theo qui tắc nhân xác suất, ta có :

$$P(A_2B_2) = 0{,}5 \,.\, 0{,}25 = 0{,}125 = \frac{1}{8}$$

b) Gọi H_1 là biến có "Khi gieo hai đồng xu lần đầu thì cả hai đồng xu đều ngửa", H_2 là biến cố "Khi gieo hai đồng xu lần thứ hai thì cả hai đồng xu đều ngửa". Khi đó H_1H_2 là biến cố "Khi gieo hai đồng xu hai lần thì hai lần cả hai đồng xu đều ngửa".

Từ câu a) ta có $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{8}$.

Áp dụng quy tắc nhân xác suất, ta có : $P(H_1H_2) = P(H_1)P(H_2) = \frac{1}{8}.\frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

37. *Trong một bài thi trắc nghiệm khách quan có 10 câu. Mỗi câu có 5 phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Một học sinh không học bài nên làm bài bằng cách với mỗi câu đều chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Tính xác suất để học sinh đó trả lời không đúng cả 10 câu (tính chính xác đến hàng phần vạn).*

Giải

Gọi A_i là biến cố "Học sinh đó trả lời không đúng câu thứ i" với $i = 1,\dots,10$. Khi đó $A_1A_2\dots A_{10}$ là biến cố "Học sinh đó trả lời không đúng cả 10 câu". Từ giả thiết ta có $P(A_i) = 0{,}8$.

Áp dụng qui tắc nhân xác suất, ta có :

$$P(A_1A_2 \dots A_{10}) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_{10}) = (0{,}8)^{10} \approx 0{,}1074.$$

38. *Có hai hòm đựng thẻ, mỗi hòm đựng 12 thẻ đánh số từ 1 đến 12. Từ mỗi hòm rút ngẫu nhiên một thẻ. Tính xác suất để trong hai thẻ rút ra có ít nhất một thẻ đánh số 12.*

Giải

Gọi A là biến cố "Thẻ rút từ hòm thứ nhất không đánh số 12", B là biến cố "Thẻ rút từ hòm thứ hai không đánh số 12". Ta có $P(A) = P(B) = \frac{11}{12}$.

Gọi H là biến cố "Trong hai thẻ rút từ hai hòm có ít nhất một thẻ đánh số 12". Khi đó biến cố đối của biến cố H là $\overline{H}$: "Cả hai thẻ rút từ hai hòm đều không đánh số 12". Vậy $\overline{H} = AB$. Theo qui tắc nhân xác suất, ta có :

$$P(\overline{H}) = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{121}{144}$$

Vậy $P(H) = 1 - P(\overline{H}) = 1 - \frac{121}{144} = \frac{23}{144}$

39. *Cho P(A) = 0,3; P(B) = 0,4 và P(AB) = 0,2. Hỏi hai biến cố A và B có :*

a) Xung khắc hay không ? *b) Độc lập với nhau hay không ?*

Giải

a) Vì $P(AB) = 0{,}2 \neq 0$ nên hai biến cố A và B không xung khắc.

b) Ta có $P(A)P(B) = 0{,}12$. Vì $P(AB) = 0{,}2 \neq 0{,}12 = P(A)P(B)$ nên hai biến cố A và B không độc lập với nhau.

40. *Trong một trò chơi điện tử, xác suất để An thắng một trận là 0,4. Hỏi An phải chơi tối thiểu bao nhiêu trận để trong loạt chơi đó xác suất thắng ít nhất một trận lớn hơn 0,95 ?*

Giải

Gọi n là số trận mà An chơi. A là biến cố "An thắng ít nhất một trận trong loạt chơi n trận". Biến cố A là $\overline{A}$: "An thua cả n trận". Ta có $P(\overline{A}) = (0{,}6)^n$

Vậy $P(A) = 1 - (0{,}6)^n$. Ta cần tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa mãn $P(A) \geq 0{,}95$ tức là $0{,}5 \geq (0{,}6)^n$.

Ta có $(0{,}6)^5 \approx 0{,}078$; $(0{,}6)^6 \approx 0{,}047$. Vậy n nhỏ nhất là 6. Thành thử An phải chơi tối thiểu 6 trận.

41. *Gieo hai con súc sắc cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc bằng 8.*

Giải

Gọi B là biến cố "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc là 8". Tập hợp mô tả biến cố B gồm 5 phần tử :

$\Omega_B = \{(2; 6), (6; 2), (3; 5), (5; 3), (4; 4)\}$

và không gian mẫu Ω có 36 phần tử

Khi đó $P(B) = \frac{5}{36}$.

42. *Gieo ba con súc sắc cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để tổng số chấm trên mặt xuất hiện của ba con súc sắc bằng 9.*

Giải

Giả sử T là phép thử "Gieo ba con súc sắc".

Kết quả của T là bộ ba số (x, y, z), trong đó x, y, z tương ứng là kết quả của việc gieo con súc sắc thứ nhất, thứ hai, thứ ba. Không gian mẫu T có 6.6.6 = 216 phần tử. Gọi A là biến cố "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của ba con súc sắc là 9". Ta có tập hợp các kết quả thuận lợi cho A là :

$$\Omega_A = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 9,\ 1 \le x \le 6,\ 1 \le y \le 6,\ 1 \le z \le 6 \text{ và } x, y, z \in \mathbb{N}^*\}$$

Nhận xét : $9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4 = 1 + 4 + 4$
$= 2 + 2 + 5 = 3 + 3 + 3$

Tập $\{1, 2, 6\}$ cho ta 6 phần tử của Ω_A là $(1, 2, 6), (1, 6, 2), (6, 1, 2), (6, 2, 1), (2, 1, 6), (2, 6, 1)$.

Tương tự các tập $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, mỗi tập cho ta 6 phần tử của Ω_A; các tập $\{1, 4, 4\}$, $\{2, 2, 5\}$, mỗi tập cho ta 3 phần tử của Ω_A; tập $\{3, 3, 3\}$ cho ta duy nhất một phần tử của Ω_A.

Vậy $|\Omega_A| = 6 + 6 + 6 + 3 + 3 + 1 = 25$

Suy ra $P(A) = \dfrac{25}{216}$

BÀI TẬP LÀM THÊM

Cho hai hộp bi. Hộp thứ nhất có 7 bi xanh và 3 bi đỏ. Hộp thứ hai có 6 bi xanh và 4 bi đỏ. Từ mỗi hộp lấy ra 1 viên bi. Tính xác suất để :

1) Được 1 bi xanh và 1 bi đỏ.

2) Được 2 bi đỏ.

3) Được ít nhất 1 bi đỏ.

ĐS : A_1 : Biến cố lấy ở hộp thứ nhất là đỏ.
A_2 : biến cố lấy ở hộp thứ hai là đỏ.

1) $A = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2$ là biến cố lấy 1 xanh và 1 đỏ

$$P(A) = \frac{3}{10}.\frac{6}{10} + \frac{7}{10}.\frac{4}{10} = \frac{46}{100}$$

2) $P(B) = P(A_1A_2) = \dfrac{3}{10}.\dfrac{4}{10} = \dfrac{12}{100}$

3) $P(A) + P(B) = \dfrac{58}{100}.$

§6. BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Khái niệm biến ngẫu nhiên rời rạc :

Đại lượng X được gọi là một biến ngẫu nhiên rời rạc nếu nó nhận giá trị bằng số thuộc một tập hữu hạn nào đó và giá trị ấy là ngẫu nhiên, không dự đoán trước được.

2. Phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc :

Giả sử $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

Gọi $P_i = P(X = x_i)$ *với* $i = 1, 2, ... , n$

Ta lập bảng sau :

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Bảng 1

Bảng 1 được gọi là bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X.

Chú ý : $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$

3. Kì vọng :

Định nghĩa :

Giả sử $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ *được gọi là kì vọng của X;*

ở đó $p_i = P(X = x_i)$, $(i = 1, 2, ..., n)$

Ý nghĩa : *E(X) là một số cho ta một ý niệm về độ lớn trung bình của X. Vì thế kì vọng E(X) còn được gọi là giá trị trung bình của X.*

Nhận xét : *Kì vọng của X không nhất thiết thuộc tập các giá trị của X.*

4. Phương sai và độ lệch chuẩn :

a) Phương sai :

Định nghĩa :

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

$$V(X) = (x_1 - \mu)^2 p_1 + ... + (x_n - \mu)^2 p_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$$ *được gọi là*

phương sai của X; ở đó $p_i = P(X = x_i)(i = 1, 2, ..., n)$ *và* $\mu = E(X)$

Ý nghĩa : *Phương sai là một số không âm. Nó cho ta một ý niệm về mức độ phân tán các giá trị của X xung quanh giá trị trung bình. Phương sai càng lớn thì độ phân tán này càng lớn.*

b) Độ lệch chuẩn :

Định nghĩa :

Căn bậc hai của phương sai, kí hiệu là $\sigma(X)$*, được gọi là độ lệch chuẩn của X. Ta có :* $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

43. *Một cuộc điều tra được tiến hành như sau : Chọn ngẫu nhiên một bạn học sinh trên đường và hỏi xem gia đình bạn đó có bao nhiêu người. Gọi X là số người trong gia đình bạn học sinh đó. Hỏi X có phải là biến ngẫu nhiên rời rạc không ? Vì sao ?*

Giải

X là một biến ngẫu nhiên rời rạc vì :

- Giá trị của X là một số thuộc tập hợp {1, 2,...,100} (vì số người trong mỗi gia đình ở Việt Nam chắc chắn không thể vượt quá 100).
- Giá trị của X là ngẫu nhiên (vì giá trị đó phụ thuộc vào bạn học sinh mà ta chọn một cách ngẫu nhiên).

44. *Chọn ngẫu nhiên một gia đình trong số các gia đình có ba con. Gọi X là số con trai trong gia đình đó. Hãy lập bảng phân bố xác suất của X (giả thiết rằng xác suất sinh con trai là 0,5).*

Giải

X là một biến ngẫu nhiên rời rạc. Tập hợp các giá trị của X là {0, 1, 2, 3}. Để lập bảng phân bố xác suất của X, ta phải tính các xác suất P(X = 0), P(X = 1), P(X = 2) và P(X = 3).

Không gian mẫu gồm 8 phần tử sau :

{TTT, TTG, TGT, TGG, GTT, GTG, GGT, GGG},

trong đó chẳng hạn GTG chỉ giới tính của ba người con lần lượt là Gái, Trai, Gái.

Như vậy không gian mẫu gồm 8 kết quả có đồng khả năng.

Gọi A_k là biến cố "Gia đình đó có k con trai" (k = 0, 1, 2, 3)

$P(X = 0) = P(A_o) = \frac{1}{8}$ (vì chỉ có một kết quả thuận lợi cho A_o là GGG);

$P(X = 1) = P(A_1) = \frac{3}{8}$ (vì có 3 kết quả thuận lợi cho A_1 là TGG, GTG và GGT);

$P(X = 2) = P(A_2) = \frac{3}{8}$ (vì có 3 kết quả thuận lợi cho A_2 là GTT, TGT và TTG);

$P(X = 3) = P(A_3) = \frac{1}{8}$ (vì có 1 kết quả thuận lợi cho A_3 là TTT)

Vậy bảng phân bố xác suất của X là :

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

45. *Số ca cấp cứu ở một bệnh viện vào tối thứ bảy là một biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau :*

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
P	*0,15*	*0,2*	*0,3*	*0,2*	*0,1*	*0,05*

Biết rằng, nếu có hơn 2 ca cấp cứu thì phải tăng cường thêm bác sĩ trực.

a) Tính xác suất để phải tăng cường thêm bác sĩ trực vào tối thứ bảy.

b) Tính xác suất để có ít nhất một ca cấp cứu vào tối thứ bảy.

Giải

a) Gọi A là biến cố "Phải tăng bác sĩ trực". Từ điều kiện của bài ra, ta có :

$$P(A) = P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0,2 + 0,1 + 0,05 = 0,35$$

b) $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,15 = 0,85$.

46. *Số cuộc điện thoại gọi đến một tổng đài trong khoảng thời gian 1 phút vào buổi trưa (từ 12 giờ đến 13 giờ) là một biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất sau :*

X	0	1	2	3	4	5
P	0,3	0,2	0,15	0,15	0,1	0,1

Tính xác suất để trong khoảng thời gian từ 12 giờ 30 phút đến 12 giờ 31 phút có nhiều hơn 2 cuộc gọi.

Giải

Ta có $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

$= 0,15 + 0,1 + 0,1 = 0,35$

47. *Tính kỳ vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc X trong bài tập 44 (tính chính xác đến hàng phần trăm).*

Giải

Ta có $X = \{0, 1, 2, 3\}$

Bảng phân bố xác suất của X là :

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Kỳ vọng của X là :

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1,5$$

Phương sai của X là :

$$V(X) = (x_1 - 1,5)^2p_1 + (x_2 - 1,5)^2p_2 + (x_3 - 1,5)^2p_3 + (x_4 - 1,5)^2p_4 = 0,75$$

Độ lệch chuẩn của X là : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 0,87$

48. *Tính kỳ vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc X trong bài tập 45 (tính chính xác đến hàng phần trăm)*

Giải

Ta có $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Bảng phân bố xác suất của X là :

X	0	1	2	3	4	5
P	0,15	0,2	0,3	0,2	0,1	0,05

Kỳ vọng của X là :

$$E(X) = 0.0,15 + 1.0,2 + 2.0,3 + 3.0,2 + 4.0,1 + 5.\ 0,05 = 2,05$$

Phương sai :

$$V(X) = (0-2{,}05)^2 \,.\, 0{,}15 + (1-2{,}05)^2 \,.\, 0{,}2 + (2-2{,}05)^2 \,.\, 0{,}3 + (3-2{,}05)^2.0{,}2 + (4-2{,}05)^2.0{,}1 + (5-2{,}05)^2 \,.\, 0{,}05 \approx 1{,}85$$

Độ lệch chuẩn của X là : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 1{,}36$

49. *Tính kỳ vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc X trong bài tập 46 (tính chính xác đến hàng phần trăm).*

Giải

Ta có X = {0, 1, 2, 3, 4, 5}

Bảng phân bố xác suất của X là :

X	0	1	2	3	4	5
P	0,3	0,2	0,15	0,15	0,1	0,1

Kỳ vọng của X là :

$$E(X) = 0.0{,}3 + 1.0{,}2 + 2.0{,}15 + 3.0{,}15 + 4.0{,}1 + 5.0{,}1 = 1{,}85$$

Phương sai :

$$V(X) = (0-1{,}85)^2 \,.\, 0{,}3 + (1-1{,}85)^2 \,.\, 0{,}2 + (2-1{,}85)^2.0{,}15 + (3-1{,}85)^2 \,.\, 0{,}15 + (4-1{,}85)^2.0{,}1 + (5-1{,}85)^2.0{,}1 \approx 2{,}83$$

Độ lệch chuẩn của X là : $\sigma = \sqrt{V(X)} \approx 1{,}68$

50. *Chọn ngẫu nhiên 3 đứa trẻ từ một nhóm trẻ gồm 6 trai và 4 gái. Gọi X là số bé gái trong số 3 đứa trẻ được chọn. Lập bảng phân bố xác suất của X.*

Giải

Ta có X = {0, 1, 2, 3}

Xác suất để không có bé gái nào là : $P(X = 0) = \dfrac{C_6^3}{C_{10}^3} = \dfrac{1}{6}$

Xác suất để có 1 bé gái là : $P(X = 1) = \dfrac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \dfrac{1}{2}$

Xác suất để có 2 bé gái là : $P(X = 2) = \dfrac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \dfrac{3}{10}$

Xác suất để có 3 bé gái là : $P(X = 3) = \dfrac{C_4^3}{C_{10}^3} = \dfrac{1}{30}$

Vậy bảng phân bố xác suất của X là :

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

51. *Số đơn đặt hàng đến trong một ngày ở một công ty vận tải là một biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau :*

X	0	1	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,4	0,1	0,1	0,1

a) Tính xác suất để số đơn đặt hàng thuộc đoạn [1; 4].

b) Tính xác suất để có ít nhất 4 đơn đặt hàng đến công ty đó trong một ngày.

c) Tính số đơn đặt hàng trung bình đến công ty đó trong một ngày.

Giải

a) Xác suất để số đơn đặt hàng thuộc đoạn [1; 4] là :

$$P(1 \le X \le 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$
$$= 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}8$$

b) Ta có : $P(X \ge 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$

c) Số đơn đặt hàng trung bình đến công ty trong 1 ngày là kỳ vọng của X.

$E(X) = 0.0{,}1 + 1.0{,}2 + 2.0{,}4 + 3.0{,}1 + 4.0{,}1 + 5.0{,}1 = 2{,}2$

52. *Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau :*

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	0,01	0,05	0,1	0,14	0,18	0,25	0,15	0,07	0,04	0,01

a) Tính P(2 < X < 7) ;

b) Tính P(X > 5).

Giải

a) Ta có : $P(2 < X < 7) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$

$$= 0{,}14 + 0{,}18 + 0{,}25 + 0{,}15 = 0{,}72$$

b) $P(X > 5) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9)$

$$= 0{,}15 + 0{,}07 + 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}27$$

53. *Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau :*

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{27}{56}$	$\frac{3}{14}$

Tính E(X), V(X) và σ(X) (tính chính xác đến hàng phần nghìn).

Giải

Ta có : $E(X) = 0.\frac{1}{28} + 1.\frac{15}{56} + 2.\frac{27}{56} + 3.\frac{3}{14} = 1{,}875$

$$V(X) = (0 - 1{,}875)^2 . \frac{1}{28} + (1 - 1{,}875)^2 . \frac{15}{56} + (2 - 1{,}875)^2 . \frac{27}{56} + (3 - 1{,}875)^2.\frac{3}{14} \approx 0{,}609$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 0{,}781$$

54. *Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau :*

X	15	18	21	24
P	$\frac{3}{14}$	$\frac{27}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{28}$

Tính E(X), V(X) và σ(X) (tính chính xác đến hàng phần nghìn)

Giải

Ta có : $E(X) = 15 . \frac{3}{14} + 18 . \frac{27}{56} + 21 . \frac{15}{56} + 24 . \frac{1}{28} = 18{,}375$

$$V(X) = (15 - 18{,}375)^2 . \frac{3}{14} + (18 - 18{,}375)^2 . \frac{27}{56} + (21 - 18{,}375)^2 . \frac{15}{56} + (24 - 18{,}375)^2. \frac{1}{28} \approx 5{,}484$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 2{,}342$$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

55. *Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có ba chữ số (không phải nhất thiết khác nhau) ?*

Giải

Để lập một số chẵn có ba chữ số $\overline{abc}$ từ các chữ số cho ta có thể chọn chữ số a trong tập {1, 2, 3, 4, 5, 6}, chữ số b trong tập {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} và chữ số c trong tập {0, 2, 4, 6}. Như vậy chữ số a có 6 cách chọn, chữ số b có 7 cách chọn và chữ số c có 4 cách chọn. Theo qui tắc nhân, ta có 6.7.4 = 168 cách lập một số thỏa mãn đề bài.

56. *Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập nên bao nhiêu số chẵn có ba chữ số khác nhau ?*

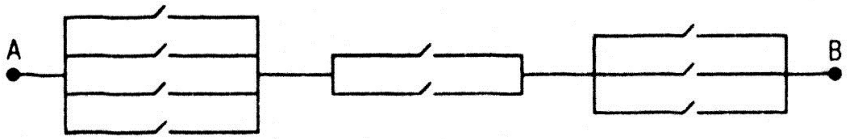
Giải

Để lập số chẵn có ba chữ số $\overline{abc}$, đầu tiên ta lấy chữ số c trong tập {2, 4}. Có hai cách chọn chữ số c. Sau đó ta chọn chữ số b trong tập {1, 2, 3, 4, 5} \ {c}. Có 4 cách chọn chữ số b. Cuối cùng, ta chọn số a trong tập {1, 2, 3, 4, 5} \ {c, b}. Có 3 cách chọn chữ số a. Vậy theo qui tắc nhân, ta có 2.4.3 = 24 số chẵn thỏa mãn điều kiện đầu bài.

57. *Xét sơ đồ mạng điện có 9 công tắc, trong đó mỗi công tắc có hai trạng thái đóng và mở.*

a) Hỏi mạng điện có thể có bao nhiêu cách đóng – mở 9 công tắc trên ?

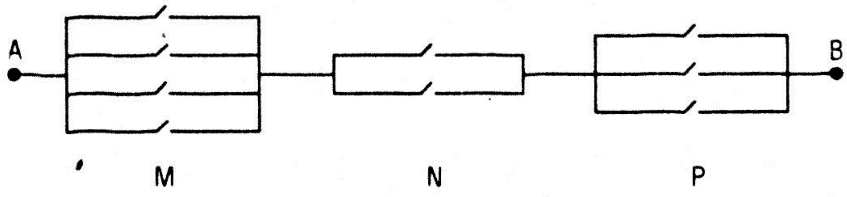
b) Hỏi mạng điện có bao nhiêu cách đóng - mở 9 công tắc trên để thông mạch từ A đến B (tức là có dòng điện đi từ A đến B) ?



Giải

a) Mỗi công tắc có hai trạng thái đóng và mở. Mạng điện có 9 công tắc. Theo qui tắc nhân, mạng điện có $2^9 = 512$ cách đóng – mở 9 công tắc trên.

b)



Khối M có $2^4 = 16$ cách đóng – mở 4 công tắc trong đó chỉ có một cách không thông mạch. Do đó có 15 cách đóng – mở 4 công tắc để thông mạch của khối M. Tương tự có 3 cách đóng – mở 2 công tắc để thông mạch của khối N và 7 cách đóng – mở 3 công tắc để thông mạch của khối P. Mạng điện thông mạch từ A đến B khi và chỉ khi cả ba khối M, N và P đều thông mạch. Theo qui tắc nhân, mạng điện có cả thảy 15.3.7 = 315 cách đóng – mở 9 công tắc để thông mạch.

58. *Trong không gian cho tập hợp gồm 9 điểm trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tứ diện với đỉnh thuộc tập hợp đã cho ?*

Giải

Số tứ diện cần tìm là số tổ hợp chập 4 của 9 phần tử.

Vậy có $C_9^4 = 126$ tứ diện.

59. *Một câu lạc bộ có 25 thành viên.*

a) Có bao nhiêu cách chọn 4 thành viên vào Ủy ban Thường trực ?

b) Có bao nhiêu cách chọn Chủ tịch, Phó Chủ tịch và Thủ quỹ ?

Giải

a) Số cách chọn 4 thành viên vào Ủy ban Thường trực là số tổ hợp chập 4 của 25 phần tử.

Vậy có $C_{25}^4 = 12650$ cách chọn.

b) Số cách chọn Chủ tịch, Phó Chủ tịch và Thủ quỹ là số chỉnh hợp chập 3 của 25 phần tử.

Vậy có $A_{25}^3 = 13800$ cách chọn Chủ tịch, Phó Chủ tịch và Thủ quỹ.

60. *Tìm hệ số của x^8y^9 trong khai triển của $(3x + 2y)^{17}$.*

Giải

Ta có $(3x + 2y)^{17} = \sum_{k=0}^{14} C_{17}^k (3x)^{17-k}(2y)^k$

Số hạng chứa x^8y^9 trong khai triển của $(3x + 2y)^{17}$ là $C_{17}^9(3x)^8(2y)^9$

(ứng với k = 9)

Vậy hệ số của x^8y^9 là $C_{17}^9 3^8 2^9$

61. *Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên bé hơn 1000. Tính xác suất để số đó :*

a) Chia hết cho 3 ; *b) Chia hết cho 5.*

Giải

a) Các số chia hết cho 3 có dạng n = 3k, ta có $0 \leq 3k \leq 999 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 333{,}3$. Vậy có 334 số tự nhiên chia hết cho 3 và bé hơn 1000. Do đó xác suất để số chia hết cho 3 là : $P = \dfrac{334}{1000} = 0{,}334$.

b) Các số chia hết cho 5 có dạng n = 5k, ta có $0 \leq 5k < 1000 \Leftrightarrow 0 \leq k < 200$. Vậy có 200 số tự nhiên chia hết cho 5 và bé hơn 1000. Do đó $P = \dfrac{200}{1000} = 0{,}2$.

62. *Chọn ngẫu nhiên 5 quân bài trong cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài. Tính xác suất để trong 5 quân bài này có quân 2 rô, quân pích, quân 6 cơ, quân 10 nhép và quân K cơ.*

● ***Giải***

Có C_{52}^5 cách chọn 5 quân bài.

Vì trong các quân bài chỉ có duy nhất quân 2 rô, 3 quân pích, quân 6 cơ, quân 10 nhép và quân K cơ nên xác suất cần tìm là $P = \dfrac{1}{C_{52}^2}$

63. *Chọn ngẫu nhiên 5 quân bài trong cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài. Tính xác suất để trong 5 quân bài này có ít nhất một quân át (tính chính xác đến hàng phần nghìn).*

● ***Giải***

Số kết quả có thể là C_{52}^5. Gọi A là biến cố "Trong năm quân bài có ít nhất một quân át". Biến cố đối của A là $\overline{A}$: "Trong năm quân bài không có quân át". Số kết quả thuận lợi cho $\overline{A}$ là C_{48}^5 (đó là số cách chọn 5 quân bài trong 48 quân bài không phải là quân át).

Vậy $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C_{48}^5}{C_{52}^5} \approx 0{,}341$

64. *Có hai hòm, mỗi hòm chứa 5 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hòm một tấm thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên hai tấm thẻ rút ra không nhỏ hơn 3.*

● ***Giải***

Không gian mẫu $\Omega = \{x; y\} \mid 1 \le x \le 5, 1 \le y \le 5$, và $x, y \in \mathbb{N}^*\}$, trong đó x và y theo thứ tự là số ghi trên thẻ rút ở hòm thứ nhất và hòm thứ hai. Ta có $|\Omega| = 5.5 = 25$.

Gọi A là biến cố có "Tổng số ghi trên hai tấm thẻ được rút ra từ 3 trở lên"

Khi đó $\overline{A}$ là biến cố "Tổng số ghi trên hai tấm thẻ được rút ra nhỏ hơn 3".

Ta có $\Omega_{\overline{A}} = \{(1; 1)\}$ nên $|\Omega_{\overline{A}}| = 1$

Vậy $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{|\Omega_{\overline{A}}|}{|\Omega|} = 1 - \dfrac{1}{125} = 0{,}96$

65. *Có 3 hòm, mỗi hòm chứa 5 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hòm một tấm thẻ. Tính xác suất để :*

a) Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra không nhỏ hơn 4;

b) Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra bằng 6.

Giải

Không gian mẫu $\Omega = \{x; y; z\} \mid 1 \le x \le 5, 1 \le y \le 5, 1 \le z \le 5$, và $x, y, z \in \mathbb{N}^*\}$, trong đó x, y và z theo thứ tự là số ghi trên thẻ rút ở hòm thứ nhất, thứ hai và thứ ba. Ta có $|\Omega| = 5.5.5 = 125$.

a) Gọi A là biến cố đang xét. Khi đó $\overline{A}$ là biến cố "Tổng số ghi trên ba tấm thẻ được chọn nhiều nhất là 3". Khi đó $\Omega_{\overline{A}} = \{(1, 1, 1)\}$ nên $|\Omega_{\overline{A}}| = 1$

Vậy $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{125} = 0{,}992$

b) Gọi B là biến cố đang xét. Khi đó :

$\Omega_B = \{(x, y, z) x + y + z = 6, 1 \le x \le 5, 1 \le y \le 5, 1 \le z \le 5$ và $x, y, z \in \mathbb{N}^*\}$

Ta có : $6 = 1 + 2 + 3 = 1 + 1 + 4 = 2 + 2 + 2$

Tập $\{1, 2, 3\}$ cho ta sáu phần tử của Ω_B, tập $\{1, 1, 4\}$ cho ta ba phần tử của Ω_B, tập $\{2, 2, 2\}$ chỉ cho ta duy nhất một phần tử của Ω_B.

Vậy $|\Omega_B| = 6 + 3 + 1 = 10$

Do đó : $P(B) = \frac{10}{125} = 0{,}08$

56. *Số lỗi đánh máy trên một trang sách là một biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau :*

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
P	*0,01*	*0,09*	*0,3*	*0,3*	*0,2*	*0,1*

Tính xác suất để :

a) Trên trang sách có nhiều nhất 4 lỗi;

b) Trên trang sách có ít nhất 2 lỗi.

Giải

a) Xác suất để trên trang sách có nhiều nhất 4 lỗi là :

$P(X \le 4) = 1 - P(X = 5) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

b) Xác suất để trên trang sách có ít nhất 2 lỗi là :

$P(X \ge 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0{,}01 - 0{,}09 = 0{,}9$

57. *Có hai túi, túi thứ nhất chứa ba tấm thẻ đánh số 1, 2, 3 và túi thứ hai chứa bốn tấm thẻ đánh số 4, 5, 6, 8. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi một tấm thẻ rồi cộng hai số ghi trên hai tấm thẻ với nhau. Gọi X là số thu được.*

a) Lập bảng phân bố xác suất của X ; *b) Tính E(X).*

Giải

a) Không gian mẫu $\Omega = \{(x; y) \mid x \in \{1, 2, 3\}, y \in \{4, 5, 6, 8\}\}$

Khi đó $|\Omega| = 3 . 4 = 12$

Ta có X nhận các giá trị thuộc tập {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}

Ta tính P(X = 5). Gọi A là biến cố "X = 5" (tức là biến cố "Tổng số ghi trên hai tấm thẻ bằng 5". Ta có :

$$\Omega_A = \{(1; 4)\}. \text{ Vậy } P(X = 5) = \frac{1}{12}$$

Hoàn toàn tương tự, ta tính được :

$P(X = 6) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

(vì biến có "X = 6" có hai kết quả thuận lợi là (1; 5) và (2; 4)).

$P(X = 7) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

(vì biến có "X = 7" có ba kết quả thuận lợi là (1; 6) và (2; 5) và (3; 4));

$P(X = 8) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

(vì biến có "X = 8" có hai kết quả thuận lợi là (3; 5) và (2; 6));

$P(X = 9) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

(vì biến có "X = 9" có hai kết quả thuận lợi là (3; 6) và (1; 8));

$P(X = 10) = \frac{1}{12}$

(vì biến có "X = 10" chỉ có một kết quả thuận lợi là (2; 8));

$P(X = 11) = \frac{1}{12}$

(vì biến có "X = 11" chỉ có một kết quả thuận lợi là (3; 8))

Ta suy ra bảng phân bố xác suất của X như sau :

X	5	6	7	8	9	10	11
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

b) Ta có $E(X) = 5.\frac{1}{12} + 6.\frac{1}{6} + 7.\frac{1}{4} + 8.\frac{1}{6} + 9.\frac{1}{6} + 10.\frac{1}{12} + 11.\frac{1}{12} = 7{,}75$

58. *Một nhóm có 7 người trong đó gồm 4 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 người. Gọi X là số nữ trong 3 người được chọn.*

a) Lập bảng phân bố xác suất của X.

b) Tính E(X) và V(X) (tính chính xác đến hàng phần trăm).

Giải

a) Số trường hợp có thể là $C_7^3 = 35$

Xác suất để không có người nữ nào được chọn là : $P(X = 0) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$

Xác suất để có 1 nữ được chọn là $P(X = 1) = \dfrac{C_3^1 . C_4^2}{C_7^3} = \dfrac{18}{35}$

Xác suất để có 2 nữ được chọn là $P(X = 2) = \dfrac{C_3^2 . C_4^1}{C_7^3} = \dfrac{12}{35}$

Xác suất để có 3 nữ được chọn là $P(X = 3) = \dfrac{C_3^3}{C_7^3} = \dfrac{1}{35}$

Bảng phân bố xác suất của X như sau :

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

b) Ta có : $E(X) = 0 . \dfrac{4}{35} + 1 . \dfrac{18}{35} + 2 . \dfrac{12}{35} + 3 . \dfrac{1}{35} = \dfrac{9}{7} \approx 1{,}29$

$$V(X) = \left(0 - \frac{9}{7}\right)^2 . \frac{4}{35} + \left(1 - \frac{9}{7}\right)^2 . \frac{18}{35} + \left(2 - \frac{9}{7}\right)^2 . \frac{12}{35} + \left(3 - \frac{9}{7}\right)^2 . \frac{1}{35}$$

$$\approx 0{,}49$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong các bài từ 69 đến 73, hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả đã cho.

69. *Trong các số nguyên từ 100 đến 999, số các số mà các chữ số của nó tăng dần hoặc giảm dần (kể từ trái sang phải) bằng :*

A(120) ; *(B) 168 ;* *C) 204 ;* *(D) 216*

Giải

Mỗi tập con có ba phần tử thuộc tập {1, 2, ..., 9} xác định duy nhất một số có ba chữ số tăng dần từ trái sang phải (vì chữ số đầu tiên bên trái khác 0). Mỗi tập con có ba phần tử của tập {0, 1,2, ...,9} xác định duy nhất một số có ba chữ số giảm dần từ trái sang phải.

Vậy có $C_9^3 + C_{10}^3 = 204$ số cần tìm.
Chọn (C)

70. *Một đội xây dựng gồm 10 công nhân, 3 kỹ sư. Để lập một tổ công tác, cần chọn một kỹ sư làm tổ trưởng, một công nhân làm tổ phó và 5 công nhân làm tổ viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?*

(A) 3780 ; *(B) 3680 ;* *(C) 3760 ;* *(D) 3520.*

Giải

Có ba cách chọn một kỹ sư làm tổ trưởng, 10 cách chọn một công nhân làm tổ phó và $C_9^5 = 126$ cách chọn 5 công nhân trong 9 công nhân làm tổ viên. Theo qui tắc nhân có $3.10.126 = 3780$ cách chọn.

Chọn (A)

71. *Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu chữ số chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau (chữ số đầu tiên phải khác 0) ?*

(A) 1250 ; *(B) 1260 ;* *(C) 1280 ;* *(D) 1270.*

Giải

Số cần tìm có dạng $\overline{abcde}$ với $e \in \{0, 2, 4, 6\}$

* Với $e = 0$ ta có A_6^4 cách chọn số $\overline{abcd}$

* Với $e \in \{2, 4, 6\}$ ta có $A_6^4 - A_5^3$ cách chọn số $\overline{abcd}$ (do $a \neq 0$)

Vậy có $A_6^4 + 3(A_6^4 - A_5^3) = 4A_6^4 - 3A_5^3 = 1260$

Chọn (B)

72. *Tìm hệ số của x^9 sau khi khai triển và rút gọn đa thức :*

$$(1 + x)^9 + (1 + x)^{10} + \ldots + (1 + x)^{14}$$

(A) 3001 ; *(B) 3003 ;* *(C) 3010 ;* *(D) 2901.*

Giải

Hệ số của x^9 của đa thức đã cho là :

$$C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 + C_{12}^9 + C_{13}^9 + C_{14}^9 = 3003$$

Chọn (B)

73. *Hai xạ thủ độc lập với nhau cùng bắn vào một tấm bia. Mỗi người bắn một viên. Xác suất bắn trúng của xạ thủ thứ nhất là 0,7; của xạ thủ thứ hai là 0,8. Gọi X là số viên đạn trúng bia. Tính kỳ vọng của X.*

(A) 1,75 ; *(B) 1,5 ;* *(C) 1,54 ;* *(D) 1,6.*

Giải

$$P(X = 0) = (0{,}3)(0{,}2) = 0{,}06$$

$$P(X = 1) = (0{,}7)(0{,}2) + (0{,}3)(0{,}8) = 0{,}38$$

$$P(X = 2) = (0{,}7)(0{,}8) = 0{,}56$$

Vậy $E(X) = 1(0{,}38) + 2(0{,}56) = 1{,}5$

Chọn (B)

Chương 3 DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. PHƯƠNG PHÁP QUI NẠP TOÁN HỌC

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

Phép chứng minh bằng qui nạp gồm hai bước sau :

Bước 1 : *Kiểm tra rằng mệnh đề là đúng với* $n = 1$

Bước 2 : *Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kỳ* $n = k \geq 1$ *(giả thiết này được gọi là giả thiết qui nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với* $n = k + 1$

Chú ý : *Nếu phải chứng minh rằng mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên* $n \geq p$ *(p là một số tự nhiên đúng với* $n = p$*, ở bước 2), ta giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kỳ* $n = k \geq p$ *và chứng minh rằng nó cũng đúng với* $n = k + 1$

Trường hợp thường gặp nhất là $n = 1$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có đẳng thức sau :*

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

Giải

Với $n = 1$ ta có $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n = 1$

Giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là ta có :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Ta chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$ tức là phải chứng minh :

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Thật vậy ta có : $1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$ do đó (1) đúng với mọi n nguyên dương.

2. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có đẳng thức :*

$$2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} \qquad (1)$$

Giải

Với n = 1 ta có $2^2 = \frac{2.2.3}{3}$ (đúng). Vậy (1) đúng với n = 1

Giả sử (1) đúng với n = k, tức là ta có : $2^2 + 4^2 + ... + (2k)^2 = \frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}$

Ta chứng minh (1) đúng với n = k + 1, tức là phải chứng minh :

$$2^2 + 4^2 + ... + (2k)^2 + (2k+2)^2 = \frac{2(k+1)(k+2)(2k+3)}{3}$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có : $2^2 + 4^2 + ... + (2k)^2 + (2k+2)^2$

$$= \frac{2k(k+1)(2k+1)}{3} + (2k+2)^2 = \frac{2(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{3}$$

$$= \frac{2(k+1)[2k(k+2) + 3(k+2)]}{3} = \frac{2(k+1)(k+2)(2k+3)}{3}$$

Vậy (1) đúng với n = k + 1 do đó (1) đúng với mọi $n \in N^*$

3. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có bất đẳng thức :*

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \qquad (1)$$

Giải

Với n = 1 ta có $1 < 2\sqrt{1}$. Vậy (1) đúng với n = 1

Giả sử (1) đúng với n = k, tức là ta có : $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}$

Ta chứng minh (1) đúng với n = k + 1, tức là phải chứng minh :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} \ (*)$$

Theo giả thiết qui nạp ta có : $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

Để chứng minh (*) ta cần chứng minh $2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$

Thật vậy ta có : $2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{k(k+1)} + 1 < 2(k+1)$

$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{k(k+1)} < 2k + 1 \Leftrightarrow 4k(k+1) < (2k+1)^2 \quad \Leftrightarrow 0 < 1$ (luôn đúng)

Vậy ta có (*) tức (1) đúng với n = k + 1, do đó (1) đúng với mọi $n \in N^*$

4. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$, ta luôn có đẳng thức sau :*

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)...\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \qquad (1)$$

Giải

Với n = 2 ta có $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (đúng). Vậy (1) đúng với n = 2

Giả sử (1) đúng với n = k, tức là ta có $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})...(1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{k+1}{2k}$

Ta chứng minh (1) đúng với n = k + 1, tức là phải chứng minh :

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})...(1-\frac{1}{(k+1)^2}) = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

Thật vậy theo giả thiết qui nạp ta có :

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})...(1-\frac{1}{k^2})(1-\frac{1}{(k+1)^2}) = \frac{k+1}{2k}(1-\frac{1}{(k+1)^2})$$

$$= \frac{k+1}{2k}.\frac{k^2+2k}{(k+1)^2} = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

Vậy (1) đúng với n = k + 1 do đó (1) đúng với mọi $n \geq 2$

5. *Cho n là một số nguyên lớn hơn 1. Hãy chứng minh bất đẳng thức sau :*

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \quad (1)$$

Giải

Với n = 2 ta có : $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12} > \frac{13}{24}$

Như vậy (1) đúng khi n = 2

Giả sử (1) đúng khi n = k, k > 1, tức là giả sử

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$$

ta sẽ chứng minh (1) cũng đúng khi n = k + 1, nghĩa là ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)} > \frac{13}{24}$$

Thật vậy, ta có :

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}$$

$$= \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+....+\frac{1}{2k}+\frac{2(k+1)+2k+1-2(2k+1)}{2(k+1)(2k+1)}$$

$$= \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$$

$$> \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k} > \frac{13}{24} \text{ (theo giả thiết quy nạp)}$$

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi số nguyên n > 1.

6. *Với mọi số nguyên dương n, đặt* $u_n = 7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ *(1). Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có* u_n *chia hết cho 5.*

Giải

Với n = 1, ta có :

$u_1 = 7.2^{2.1-2} + 3^{2.1-1} = 7 + 3 = 10 \vdots 5$

Suy ra (1) đúng khi n = 1.

Giả sử (1) đúng khi n = k, $k \in N^*$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi n = k + 1

Thật vậy, ta có : $u_{k+1} = 7.2^{2(k+1)-2} + 3^{2(k+1)-1}$

$= 4 \,.\, 7.\, 2^{2k-2} + 9.3^{2k-1}$

$= 4(7 \,.\, 2^{2k-2} + 3^{2k-1}) + 5.3^{2k-1} = 4 \,.\, u_k + 5.3^{2k-1}$ (2)

Vì $u_k \vdots 5$ (theo giả thiết qui nạp), nên từ (2) ta được điều cần chứng minh.

7. *Cho số thực $x > -1$. Chứng minh rằng $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ (1) với mọi số nguyên dương n.*

Giải

Với n = 1, ta có $(1 + x)^1 = 1 + x = 1 + 1.x$

Như vật, ta có (1) đúng khi n = 1

Giả sử đã có (1) đúng khi n = k, $k \in N^*$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi n = k + 1.

Thật vậy, từ giả thiết $x > -1$ và giả thiết qui nạp, ta có :

$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)(1 + x)^k \geq (1 + x)(1 + kx)$

$= 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi $n \in N^*$.

8. *Một học sinh chứng minh mệnh đề "Với k là số nguyên dương tùy ý, nếu $8^k + 1$ chia hết cho 7 thì $8^{k+1} + 1$ cũng chia hết cho 7" như sau :*

Ta có : $8^{k+1} + 1 = 8(8^k + 1) - 7$. Từ đây và giả thiết "$8^k + 1$ chia hết cho 7", hiển nhiên suy ra $8^{k+1} + 1$ chia hết cho 7".

Hỏi từ chứng minh trên, bạn học sinh đó có thể kết luận được "$8^n + 1$ chia hết cho 7 với mọi $n \in N^*$" hay không ? Vì sao ?

Trả lời

Không thể kết luận "$8^n + 1$ chia hết cho 7 với mọi $n \in N^*$", vì chưa kiểm tra tính đúng của mệnh đề đó khi n = 1.

BÀI TẬP LÀM THÊM

Chứng minh rằng với mọi $n \in N^*$ ta có :

1) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$; 2) $1.4 + 2.7 + \ldots + n(3n + 1)^2 = n(n + 1)^2$

3) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$ (với $n \geq 2$);

4) $n^3 + 11n$ chia hết cho 6; 5) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$

§2. DÃY SỐ

TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa :

Định nghĩa 1 :

Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương N^* *được gọi là một dãy số vô hạn (hay còn gọi tắt là dãy số).*

Mỗi giá trị của hàm số u được gọi là một số hạng của dãy số; $u(1)$ *được gọi là số hạng thứ nhất (hay số hạng đầu);* $u(2)$ *được gọi là số hạng thứ hai;...*

Người ta thường kí hiệu các giá trị $u(1)$, $u(2)$... *tương ứng bởi* u_1, u_2...

2. Cách cho dãy số :

- *Cho số hạng tổng quát* u_n *của nó bằng công thức.*
- *Cho một mệnh đề mô tả các số hạng liên tiếp của nó.*
- *Cho bằng phương pháp truy hồi, tức là :*
  1) *Cho số hạng đầu (hay vài số hạng đầu)*
  2) *Cho hệ thức truy hồi tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.*

3. Dãy số tăng, dãy số giảm :

Định nghĩa 2 :

Dãy số (u_n) *được gọi là dãy số tăng nếu với mọi n ta có* $u_n < u_{n+1}$
Dãy số (u_n) *được gọi là dãy số giảm nếu với mọi n ta có* $u_n > n_{n+1}$

4. Dãy số bị chặn :

Định nghĩa 3 :

a) Dãy số (u_n) *được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho* $\forall n \in N^*, u_n \le M$

b) Dãy số (u_n) *được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho* $\forall n \in N^*, u_n \ge m$.

c) Dãy số (u_n) *được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới; nghĩa là, tồn tại một số M và một số m sao cho* $\forall n \in N^*$, $m \le u_n \le M$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

a) Xét tính đơn điệu của dãy số :

1) Cách 1 : Lập hiệu $u_{n+1} - u_n$

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0\ \forall n \in Z^+$ thì $u_{n+1} > u_n$: (u_n) tăng.
- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0\ \forall n \in Z^+$ thì $u_{n+1} < u_n$: (u_n) giảm.

2) Cách 2 : Nếu $u_n > 0$; $\forall n \in Z^+$ thì lập tỉ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$; $\forall n \in Z^+$ thì $u_{n+1} > u_n$: (u_n) tăng.
- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$; $\forall n \in Z^+$ thì $u_{n+1} < u_n$: (u_n) giảm.

b) Chứng minh dãy số (u_n) không tăng không giảm :

- Chỉ ra rằng $u_1 < u_2 > u_3$ hoặc $u_1 > u_2 < u_3$.
- Thường là dãy số có số hạng $(-1)^n$.

c) Dãy số bị chặn :

(u_n) bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists M$ sao cho $u_n \leq M$, $\forall n \in Z^+$

(u_n) bị chặn dưới $\Leftrightarrow \exists m$ sao cho $u_n \geq m$, $\forall n \in Z^+$

(u_n) bị chặn $\Leftrightarrow \exists\ M > 0$ sao cho $|u_n| \leq M$, $\forall n \in Z^+$

9. *Tìm 5 số hạng đầu của mỗi dãy số sau :*

a) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n^2 - 3}{n}$;

b) Dãy số (u_n) với $u_n = \sin^2\dfrac{n\pi}{4} + \cos\dfrac{2n\pi}{3}$;

c) Dãy số $(u_n) = (-1)^n.\sqrt{4^n}$

Giải

a) Ta có $u_1 = \dfrac{2.1^2 - 3}{1} = -1$; $u_2 = \dfrac{2.2^2 - 3}{2} = \dfrac{5}{2}$;

$u_3 = \dfrac{2.3^2 - 3}{3} = 5$; $u_4 = \dfrac{2.4^2 - 3}{4} = \dfrac{13}{4}$; $u_5 = \dfrac{2.5^2 - 3}{5} = \dfrac{47}{5}$

b) $u_1 = \sin^2\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$;

$u_2 = \sin^2\dfrac{\pi}{2} + \cos\dfrac{4\pi}{3} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$;

$u_3 = \sin^2\dfrac{3\pi}{4} + \cos 2\pi = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$;

$$u_4 = \sin^2\pi + \cos\frac{8\pi}{3} = \cos(2\pi + \frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2};$$

$$u_5 = \sin^2\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{10\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

c) $u_1 = -2$; $u_2 = 4$; $u_3 = -8$; $u_4 = 16$; $u_5 = -32$.

10. *Tìm số hạng thứ 3 và số hạng thứ 5 của mỗi dãy số sau :*

a) Dãy số (u_n) xác định bởi :

$$u_1 = 0 \text{ và } u_n = \frac{2}{u_{n-1}^2 + 1} \text{ với mọi } n \geq 2 \text{ ;}$$

b) Dãy số (u_n) xác định bởi :

$$u_1 = 1;\ u_2 = -2 \text{ và } u_n = u_{n-1} - 2u_{n-2} \text{ với mọi } n \geq 3.$$

Giải

a) Ta có : $u_2 = \dfrac{2}{u_1^2 + 1} = 2$; $u_3 = \dfrac{2}{u_2^2 + 1} = \dfrac{2}{2^2 + 1} = \dfrac{2}{5}$

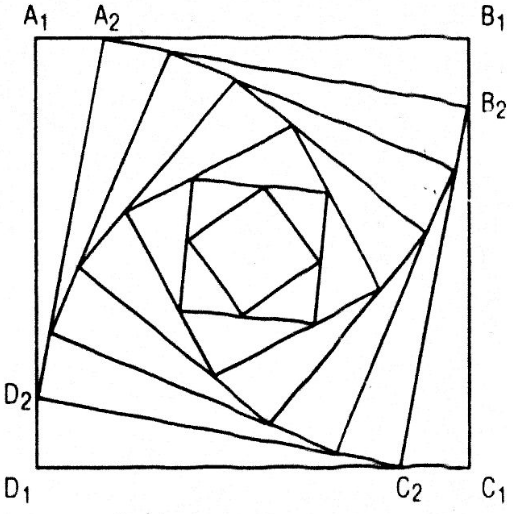
$u_4 = \dfrac{2}{u_3^2 + 1} = \dfrac{2}{\dfrac{4}{25} + 1} = \dfrac{50}{29}$; $u_5 = \dfrac{2}{u_4^2 + 1} = \dfrac{2}{\left(\dfrac{50}{29}\right)^2 + 1} = \dfrac{1682}{3341}$

b) Ta có : $u_3 = u_2 - 2u_1 = -2 - 2 = -4$

$u_4 = u_3 - 2u_2 = -4 - 2(-2) = 0$

$u_5 = u_4 - 2u_3 = 0$

11. *Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 6cm. Người ta dựng các hình vuông $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$,..., $A_nB_nC_nD_n$,... theo cách sau : Với mỗi n = 2, 3, 4,... lấy các điểm A_n, B_n, C_n và D_n tương ứng trên các cạnh $A_{n-1}B_{n-1}$, $B_{n-1}C_{n-}$, $C_{n-1}D_{n-1}$ và $D_{n-1}A_{n-1}$ sao cho $A_{n-1}A_n$ = 1cm và $A_nB_nC_nD_n$ là một hình vuông. Xét dãy số (u_n) với u_n là độ dài cạnh của hình vuông $A_nB_nC_nD_n$.*



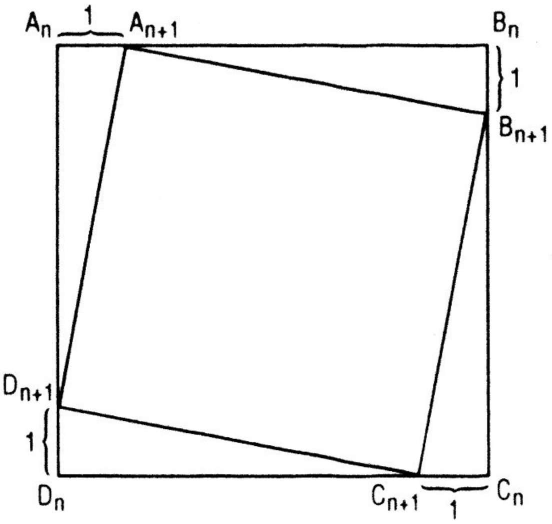
Hãy cho dãy số (u_n) nói trên bởi một hệ thức truy hồi.

Giải

Với mỗi n ∈ N*, xét các hình vuông $A_nB_nC_nD_n$ và $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$, ta có

$$u_{n+1} = A_{n+1}B_{n+1} = \sqrt{(A_{n+1}B_n)^2 + (B_nB_{n+1})^2}$$

$$= \sqrt{(A_nB_n - 1)^2 + 1^2} = \sqrt{(u_n - 1)^2 + 1}$$



12. *Cho dãy số (u_n) xác định bởi :*

$$u_1 = 1 \text{ và } u_n = 2u_{n-1} + 3 \text{ với mọi } n \geq 2$$

Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$ ta có :

$$u_n = 2^{n+1} - 3 \qquad (1)$$

Giải

Với $n = 1$ ta có $u_1 = 1 = 2^2 - 3$. Vậy (1) đúng với $n = 1$

Giả sử (1) đúng với $n - k$ tức là ta có : $u_k = 2^{k+1} - 3$

Ta chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, tức là phải chứng minh :

$$u_{k+1} = 2^{k+2} - 3$$

Thật vậy theo giả thiết qui nạp ta có :

$$u_{k+1} = 2u_k + 3 = 2(2^{k+1} - 3) + 3 = 2^{k+2} - 3$$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$ do đó (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

13. *Hãy xét tính tăng, giảm của các dãy số sau :*

a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^3 - 3n^2 + 5n - 7$;

b) Dãy số (x_n) với $x_n = \dfrac{n+1}{3^n}$;

c) Dãy số (a_n) với $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Hướng dẫn : a) Xét hiệu $u_{n+1} - u_n$; b) Xét tỉ số $\dfrac{x_n}{x_{n+1}}$

c) Viết lại công thức xác định a_n dưới dạng $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

Tiếp theo, xét tỉ số $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$

Giải

a) Ta có :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 - 3(n+1)^2 + 5(n+1) - 7 - (n^3 - 3n^2 + 5n - 7)$$

$= 3n^2 - 3n + 3 > 0, \forall n \in N^*$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n \Rightarrow (u_n)$ là dãy số tăng.

b) Ta có : $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} = \dfrac{n+1}{3^n}.\dfrac{3^{n+1}}{n+2} = \dfrac{3(n+1)}{n+2} = \dfrac{3n+3}{n+2} > 1 \ \forall n \in N^*$

$\Rightarrow x_n > x_{n+1} \Rightarrow (x_n)$ là dãy số giảm.

c) Ta có : $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > 1$$

$\Rightarrow a_n > a_{n+1} \quad \Rightarrow (a_n)$ là dãy số giảm.

14. *Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+3}{3n+2}$ là một dãy số giảm và bị chặn.*

Giải

Ta có $u_n = \dfrac{2n+3}{3n+2} = \dfrac{\frac{2}{3}(3n+2) + \frac{5}{3}}{3n+2} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{3(3n+2)}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3n+5} - \frac{1}{3n+2}\right) < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$$

$\Rightarrow (u_n)$ là dãy số giảm

Ta lại có $0 < \dfrac{2n+3}{3n+2} \leq 1 \ \forall n \in N^*$

Vậy (u_n) là dãy số giảm và bị chặn.

15. *Cho dãy số (u_n) xác định bởi :*

$u_1 = 3$ và $u_{n+1} = u_n + 5$ với mọi $n \geq 1$.

a) Hãy tính u_2, u_4 và u_6 ;

b) Chứng minh rằng $u_n = 5n - 2$ với mọi $n \geq 1$.

Giải

a) Ta có $u_2 = u_1 + 5 = 8$; $u_3 = u_2 + 5 = 13$;

$u_4 = u_5 + 5 = 18$; $u_5 = u_4 + 5 = 23$; $u_6 = u_5 + 5 = 28$

b) Ta sẽ chứng minh : $u_n = 5n - 2$ (1) với mọi $n \in N^*$, bằng phương pháp qui nạp.

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 3 = 5.1 - 2$

Như thế (1) đúng khi $n = 1$

Giả sử (1) đúng khi $n = k$, $k \in N^*$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$

Thật vậy, từ công thức xác định dãy số (u_n) và giả thiết qui nạp ta có :

$$u_{k+1} = u_k + 5 = 5k - 2 + 5 = 5(k+1) - 2$$

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi $n \in N^*$.

** Cách khác :* Ta có $u_{n+1} - u_n = 5 \ \forall n \geq 1$

Do đó $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \ldots + (u_2 - u_1) + u_1$

$= 5 + 5 + \ldots + 5 + 3 = 5(n-1) + 3 = 5n - 2$

16. *Cho dãy số (u_n) xác định bởi :*

$$u_1 = 1 \text{ và } u_{n+1} = u_n + (n+1).2^n \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng (u_n) là một dãy số tăng ;

b) Chứng minh rằng $u_n = 1 + (n-1).2^n$ với mọi $n \geq 1$.

Giải

a) Từ hệ thức xác định dãy số (u_n), ta có :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1).2^n > 0 \ \forall n \geq 1.$$

Do đó (u_n) là một dãy số tăng.

b) Ta sẽ chứng minh $u_n = 1 + (n-1).2^n$ (1) với mọi $n \geq 1$, bằng phương pháp qui nạp.

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 1 = 1 + (1-1).2^1$. Như vậy (1) đúng khi $n = 1$

Giả sử (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$.

Thật vậy, từ hệ thức xác định dãy số (u_n) và giả thiết qui nạp, ta có :

$$u_{k+1} = u_k + (k+1).2^k = 1 + (k-1).2^k + (k+1).2^k = 1 + k.2^{k+1}$$

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi $n \geq 1$.

17. *Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n^2 + 1}$ với mọi $n \geq 1$.*

Chứng minh rằng (u_n) là một dãy số không đổi (dãy số có tất cả các số hạng đều bằng nhau).

Giải

Ta chứng minh $u_n = 1$ (1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ bằng qui nạp

Rõ ràng (1) đúng với $n = 1$

Giả sử (1) đúng với $n = k$, tức là ta có $u_k = 1$

Ta chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, thật vậy ta có :

$$u_{k+1} = \frac{2}{u_k^2 + 1} = 1$$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$, do đó (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

18. *Cho dãy số (s_n) với $s_n = \sin(4n-1)\dfrac{\pi}{6}$*

a) Chứng minh rằng $s_n = s_{n+3}$ với mọi $n \geq 1$;

b) Hãy tính tổng 15 số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

Giải

a) Với n là số nguyên dương tùy ý, ta có :

$$s_{n+3} = \sin[4(n+3)-1]\frac{\pi}{6} = \sin[4n-1+12]\frac{\pi}{6}$$

$$= \sin[(4n-1)\frac{\pi}{6} + 2\pi] = \sin(4n-1)\frac{\pi}{6} = s_n$$

b) Từ kết quả phần a) ta có :

$$s_1 = s_4 = s_7 = s_{10} = s_{13},\ s_2 = s_5 = s_8 = s_{11} = s_{14},\ s_3 = s_6 = s_9 = s_{12} = s_{15}$$

Từ đó suy ra :

$$s_1 + s_2 + s_3 = s_4 + s_5 + s_6 = s_7 + s_8 + s_9 = s_{10} + s_{11} + s_{12}$$
$$= s_{13} + s_{14} + s_{15}$$

Do đó : $S_{15} = s_1 + s_2 + ... + s_{15} = 5(s_1 + s_2 + s_3)$

Bằng cách tính trực tiếp, ta có $s_1 = 1$, $s_2 = -\frac{1}{2}$ và $s_3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow S_{15} = 0$

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Viết 4 số hạng đầu của dãy (a_n) :*

a) $a_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}$;   b) $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}$;

c) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ $(a_1 = a_2 = 1)$.

2. *Xét tính đơn điệu của các dãy (a_n)*

a) $a_n = \frac{4^n - 1}{4^n + 1}$;   b) $a_n = (-1)^n . \frac{1}{n+1}$;   c) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$;

d) $a_n = (0,4)^n.n$;   e) $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}$ *(n số 2).*

Đáp số : *a) Tăng;   b) Không tăng, không giảm;*
c) Tăng ;   d) Giảm ;   e) Tăng.

3. *Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới của các dãy số :*

a) $a_n = \frac{5n-3}{5n+3}$;   b) $a_n = (-1)^n + \cos n$;

c) $a_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$;   d) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+2n} + n}$;

e) $a_n = (-1)^n \cos\frac{\pi}{2n}$.

§3. CẤP SỐ CỘNG

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. **Định nghĩa :**

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và một số d không đổi, nghĩa là :

(u_n) *là cấp số cộng* $\Leftrightarrow \forall n \geq 2,\ u_n = u_{n-1} + d$

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

2. **Tính chất :**

Định lí 1 :

Nếu (u_n) *là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là :*

$$\boxed{u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \quad k \geq 2}$$

3. **Số hạng tổng quát :**

Định lí 2 :

Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 *và công sai d thì số hạng tổng quát* u_n *của nó được xác định theo công thức sau :*

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d}$$

4. **Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng :**

(u_n) *là cấp số cộng, ta có :*

$$\boxed{S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}}$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

a) Chứng minh dãy (u_n) là cấp số cộng :

Ta chứng minh hiệu $u_{n+1} - u_n$ *là một hằng số (không phụ thuộc vào n)*
Khi nó (u_n) *là cấp số cộng có công sai* $d = u_{n+1} - u_n$.

b) Xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng :

- *Xác định* u_1 *và d*
- $u_n = u_1 + (n-1)d$
- $u_n - u_m = (n-m)d$

19. *Chứng minh rằng mỗi dãy số sau là một cấp số cộng và hãy xác định công sai của cấp số cộng đó :*

a) Dãy số (u_n) *với* $u_n = 19n - 5$ *;*

b) Dãy số (u_n) *với* $u_n = an + b$*, trong đó a và b là các hằng số.*

Giải

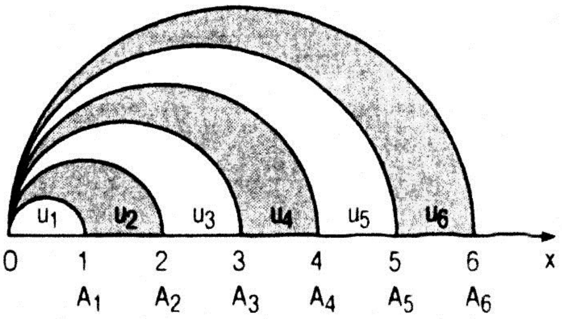
a) Ta có $u_{n+1} - u_n = 19(n+1) - 5 - (19n - 5) = 19$ với mọi $n \geq 1$.

Do đó (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 19$.

b) Ta có $u_{n+1} - u_n = a(n+1) + b - (an + b) = a$ với mọi $n \geq 1$.

Do đó (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = a$.

20. *Trên tia Ox lấy các điểm* $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ *sao cho với mỗi số nguyên dương n,* $OA_n = n$*. Trong cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa tia Ox, vẽ các nửa đường tròn đường kính* OA_n*, n = 1, 2,... Kí hiệu* u_1 *là diện tích của nửa hình tròn đường kính* OA_1 *và với mỗi* $n \geq 2$*, kí hiệu* u_n *là diện tích của hình giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính* OA_{n-1}*, nửa đường tròn đường kính* OA_n *và tia Ox. Chứng minh rằng dãy số* (u_n) *là một cấp số cộng. Hãy xác định công sai của cấp số cộng đó.*



Giải

Với $n \geq 2$ ta có :

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\pi\frac{OA_n^2}{4} - \pi\frac{OA_{n-1}^2}{4}\right) = \frac{1}{2}\pi[(n^2 - (n-1)^2] = \frac{(2n-1)\pi}{8} \ (n \geq 2)$$

$$\Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n = \frac{2n+1}{8}\pi - \frac{(2n-1)}{8}\pi = \frac{\pi}{4}, \ \forall n \geq 2$$

Mặt khác $u_2 - u_1 = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

Vậy $u_{n+1} - u_n = \frac{\pi}{4} \ \forall n \in N^*$

Do đó (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = \frac{\pi}{4}$.

21. *Trong mỗi câu sau, hãy đánh dấu "×" vào phần kết luận mà em cho là đúng :*

a) Mỗi cấp số cộng với công sai d > 0 là một dãy số.

☐ *Tăng* ☐ *Giảm* ☐ *Không tăng cũng không giảm*

b) Mỗi cấp số cộng với công sai d < 0 là một dãy số.

☐ *Tăng* ☐ *Giảm* ☐ *Không tăng cũng không giảm*

Trả lời

a) Tăng b) Giảm

22. *Một cấp số cộng có năm số hạng mà tổng của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 28, tổng số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng 40. Hãy tìm cấp số cộng đó.*

Giải

Với mỗi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số cộng đã cho.

Ta có : $28 = u_1 + u_3 = 2u_2 \Rightarrow u_2 = 14$,

$40 = u_3 + u_5 = 2u_4 \Rightarrow u_4 = 20$,

$2u_3 = u_2 + u_4 = 34 \Rightarrow u_3 = 17$

Ta có : $u_1 + u_3 = 28 \Rightarrow u_1 = 28 - u_3 = 11$

$u_3 + u_5 = 40 \Rightarrow u_5 = 40 - u_3 = 23$

Vậy cấp số cộng cần tìm là : 11, 14, 17, 20, 23

23. *Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{20} = -52$ và $u_{51} = -145$. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.*

Giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_{20} = -52 \\ u_{51} = -145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 19d = -52 \\ u_1 + 50d = -145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ d = -3 \end{cases}$$

Vậy $u_n = u_1 + (n - 1)d = 5 + (n - 1)(-3)$

$u_n = -3n + 8$

24. *Cho cấp số cộng (u_n) với công sai d và cho các số nguyên dương m và k, với $m \geq k$. Chứng minh rằng $u_m = u_k + (m - k)d$.*

Áp dụng : *Hãy tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) mà $u_{18} - u_3 = 75$*

Giải

Ta có $u_m = u_1 + (m - 1)d$ (1)

$u_k = u_1 + (k - 1)d$ (2)

Lấy (1) trừ (2) ta được :

$u_m - u_k = (m - k)d \Rightarrow u_m = u_k + (m - k)d$

Áp dụng :

Ta có $u_{18} - u_3 = (18 - 3)d = 15d = 75$

$\Rightarrow d = 5$

25. *Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 - u_3 = 6$ và $u_5 = -10$. Hãy tìm công sai và số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.*

Giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng

Ta có $\begin{cases} u_1 - u_3 = 6 \\ u_5 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - (u_1 + 2d) = 6 \\ u_1 + 4d = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -3 \\ u_1 = 2 \end{cases}$

Vậy $d = -3$ và $u_n = u_1 + (n-1)d = 2 - 3(n-1) = -3n + 5$

26. *Hãy chứng minh định lý 3 :* $S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$

Giải

Ta sẽ chứng minh $S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$ (1)

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, bằng phương pháp qui nạp.

Với $n = 1$, ta có $S_1 = u_1 = \dfrac{1(u_1 + u_1)}{2}$. Như vậy (1) đúng khi $n = 1$.

Giả sử (1) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

$$S_{k+1} = S_k + u_{k+1} = \frac{k(u_1 + u_k)}{2} + u_{k+1} = \frac{k(u_1 + u_{k+1} - d) + 2u_{k+1}}{2}$$

$$= \frac{ku_1 + (k+1)u_{k+1} + u_{k+1} - kd}{2} = \frac{ku_1 + (k+1)u_{k+1} + u_1}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(u_1 + u_{k+1})}{2}$$

nghĩa là (1) cũng đúng khi $n = k + 1$

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Cách khác : Ta có $\begin{cases} S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n \\ S_n = u_n + u_{n-1} + \ldots + u_2 + u_1 \end{cases}$

$$\Rightarrow 2S_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + \ldots + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1)$$

Mà $u_2 + u_{n-1} = u_3 + u_{n-2} = \ldots = u_n + u_1$

Do đó $2S_n = n(u_1 + u_n) \quad \Rightarrow S_n = \dfrac{n}{2}(u_1 + u_n)$

27. *Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 + u_{22} = 60$. Hãy tính tổng 23 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.*

Giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng đã cho, ta có :

$u_1 = u_2 - d$ và $u_{23} = u_{22} + d$

Do đó, áp dụng định lí 3 cho $n = 23$, ta được :

$$S_{23} = \frac{23(u_1 + u_{23})}{2} = \frac{23(u_2 + u_{22})}{2} = \frac{23.60}{2} = 23 \,.\, 30 = 690$$

28. *Số đo ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Hãy tìm số đo ba góc đó.*

Giải

Kí hiệu A, B, C là số đo ba góc (tính theo đơn vị đo) của tam giác vuông đã cho. Không mất tổng quát, có thể giả sử A ≤ B ≤ C. Khi đó, từ giả thiết dễ dàng suy ra C = 90 (độ) và A, B, C theo thứ tự đó là một cấp số cộng.

Ta có $\begin{cases} A + C = 2B \\ A + B + C = 180^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + 90^\circ = 2B \\ A + B = 90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 30^\circ \\ B = 60^\circ \end{cases}$

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Xác định a_1 và công sai của cấp số cộng (a_n) biết :*

a) $\begin{cases} a_3 = -15 \\ a_{14} = 18 \end{cases}$; b) $\begin{cases} a_2 - a_3 + a_5 = 10 \\ a_4 + a_6 = 26 \end{cases}$

2. *Hãy đặt giữa – 6 và 8 sáu số nữa để được cấp số cộng.*

Hướng dẫn : Giả sử – 6, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, 8 là cấp số cộng, ta có :

$a_1 = -6, \quad a_8 = 8 \quad \Rightarrow d = 2$

3. *Cho cấp số cộng (a_n). Chứng minh rằng :*

a) $a_1 + a_p = a_q + a_{p-q+1}$ $(p \geq q)$

b) $a_p + a_q = a_m + a_n$ *nếu* $q + p = m + n$

Hướng dẫn : áp dụng $a_n = a_1 + (n-1)d$

4. *Tìm 5 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng là 40 và tổng bình phương là 480.*

Hướng dẫn : Giải hệ $\begin{cases} (a-2d) + (a-d) + a + (a+d) + (a+2d) = 40 \\ (a-2d)^2 + (a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 + (a+2d)^2 = 480 \end{cases}$

Đáp số : 0, 4, 8, 12, 16 hoặc 16, 12, 8, 4, 0.

5. *Cho cấp số cộng (a_n) có $a_4 + a_{11} = 20$. Tính S_{14}*

6. *Cho cấp số cộng (a_n). Chứng minh rằng :*

a) $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$;

b) $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \ldots + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2 = \dfrac{n}{2n-1}(a_1^2 - a_{2n}^2)$

7. *Tính tổng* $S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$ *Đáp số :* $S_n = n^2$

8. *Chứng minh rằng nếu a^2, b^2, c^2 lập thành cấp số cộng công sai khác 0 thì :*

$\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} + \dfrac{1}{a+b}$ *cũng lập thành cấp số cộng.*

Hướng dẫn : Chứng minh $\dfrac{1}{c+a} - \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{1}{a+b} - \dfrac{1}{c+a}$

với giả thiết $2b^2 = a^2 + c^2$

§4. CẤP SỐ NHÂN

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa :

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó và một số q không đổi, nghĩa là :

(u_n) *là cấp số nhân* $\Leftrightarrow \forall n \geq 2,\ u_n = u_{n-1}.q$

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

2. Tính chất :

Định lí 1 :

Nếu (u_n) *là một cấp số nhân thì kể từ số hạng thứ hai, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số nhân hữu hạn) bằng tích của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là :*

$$\boxed{u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}\ (k \geq 2)}$$

3. Số hạng tổng quát :

Định lí 2 :

Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 *và công bội* $q \neq 0$ *thì số hạng tổng quát* u_n *của nó được xác định bởi công thức :*

$$\boxed{u_n = u_1.q^{n-1}}$$

4. Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân :

Định lí 3 :

Nếu (u_n) *là một cấp số nhân với công bội* $q \neq 1$ *thì* S_n *được tính theo công thức :*

$$\boxed{S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} \text{ với mọi } n \geq 1.}$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

a) Chứng minh (u_n) **là cấp số nhân.**

Ta chứng minh $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ không phụ thuộc vào n.

b) Xác định số hạng tổng quát của cấp số nhân $u_n = u_1q^{n-1}$

29. *Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân ? Hãy xác định công bội của cấp số nhân đó.*

a) Dãy số 1, –2, 4, –8, 16, –32, 64 ; *b) Dãy số* (u_n) *với* $u_n = n.6^{n+1}$;

c) Dãy số (v_n) *với* $v_n = (-1)^n.3^{2n}$; *d) Dãy số* (x_n) *với* $x_n = (-4)^{2n+1}$.

Giải

a) Dãy số đã cho là một cấp số nhân với công bội q = – 2.

b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{6(n+1)}{n}$ với mọi n ≥ 1. Suy ra (u_n) không phải là cấp số nhân.

c) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(-1)^{n+1}.3^{2(n+1)}}{(-1)^n.3^{2n}} = -9$ với mọi n ≥ 1. Suy ra (v_n) là một cấp số nhân với công bội q = – 9.

d) $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{(-4)^{2n+3}}{(-4)^{2n+1}} = 16$ với mọi n ≥ 1. Suy ra (x_n) là một cấp số nhân với công bội q = 16.

30. *Trong mỗi câu sau, hãy đánh dấu "×" vào phần kết luận mà em cho là đúng :*

a) Mỗi cấp số nhân có số hạng đầu dương và công bội 0 < q < 1, là một dãy số

☐ *Tăng* ☐ *Giảm* ☐ *Không tăng cũng không giảm*

b) Mỗi cấp số nhân có số hạng đầu dương và công bội q > 1 là một dãy số

☐ *Tăng* ☐ *Giảm* ☐ *Không tăng cũng không giảm*

Trả lời

a) Giảm b) Tăng

31. *Cho cấp số nhân* (u_n) *có công bội q < 0. Biết* $u_2 = 4$ *và* $u_4 = 9$, *hãy tìm* u_1.

Giải

Ta có $\begin{cases} u_2 = 4 \\ u_4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 4 & (1) \\ u_1q^3 = 9 & (2) \end{cases}$

Lấy (2) chia (1) ta được : $q^2 = \dfrac{9}{4} \Rightarrow q = -\dfrac{3}{2}$ (vì q < 0)

Từ (1) suy ra $u_1 = \dfrac{4}{q} = -\dfrac{8}{3}$

32. *Một cấp số nhân có năm số hạng mà hai số hạng đầu tiên là các số dương, tích của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 1, tích của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng* $\dfrac{1}{16}$. *Hãy tìm cấp số nhân đó.*

Giải

Với mỗi n ∈ {1, 2, 3, 4, 5}, kí hiệu u_n là số hạng thứ n của cấp số nhân đã cho. Vì $u_1 > 0$, $u_2 > 0$ nên cấp số nhân (u_n) có công bội q > 0, và do đó $u_n > 0$ ∀n ∈ {1, 2, 3, 4, 5}. Từ đó :

$1 = u_1.u_3 = u_2^2 \quad \Rightarrow u_2 = 1,$

$\dfrac{1}{16} = u_3.u_5 = u_4^2 \quad \Rightarrow u_4 = \dfrac{1}{4}$

$u_3^2 = u_2 \,.\, u_4 = \dfrac{1}{4} \quad \Rightarrow u_3 = \dfrac{1}{2}$

Do đó $u_1 = \dfrac{1}{u_3} = 2$ và $u_5 = \dfrac{1}{16} : u_3 = \dfrac{1}{8}$

Vậy cấp số nhân cần tìm là : $2, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}.$

33. *Cho cấp số nhân* (u_n) *với công bội* $q \neq 0$ *và* $u_1 \neq 0$*. Cho các số nguyên dương m và k, với* $m \geq k$*. Chứng minh rằng* $u_m = u_k \,.\, q^{m-k}$*.*

Áp dụng :

a) Tìm công bội q của cấp số nhân (u_n) *có* $u_4 = 2$ *và* $u_7 = -686$*.*

b) Hỏi có tồn tại hay không một cấp số nhân (u_n) *mà* $u_2 = 5$ *và* $u_{22} = -2000$ *?*

Giải

Ta có $u_m = u_1 \,.\, q^{m-1}$ (1)

$u_k = u_1 \,.\, q^{k-1}$ (2)

Lấy (1) chia (2) ta được :

$$\frac{u_m}{u_k} = q^{m-k} \Rightarrow u_m = u_k \,.\, q^{m-k}$$

Áp dụng : a) Ta có : $\dfrac{u_7}{u_4} = q^{7-4} \quad \Rightarrow q^3 = -343 \quad \Rightarrow q = -7$

b) Không tồn tại; vì nếu ngược lại thì cấp số nhân (u_n) sẽ có công bội q mà

$$q^{20} = \frac{u_{22}}{u_2} = \frac{-2000}{5} < 0, \text{ vô lí.}$$

34. *Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân* (u_n)*, biết rằng* $u_3 = -5$ *và* $u_6 = 135$*.*

Giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho. Theo kết quả của bài tập 33, ta có :

$$q^3 = \frac{u_6}{u_3} = \frac{135}{-5} = -27 \quad \Leftrightarrow q = -3$$

$$-5 = u_3 = u_1 \,.\, q^2 = 9u_1 \quad \Leftrightarrow u_1 = -\frac{5}{9}$$

Số hạng tổng quát : $u_n = -\dfrac{5}{9} \,.\, (-3)^{n-1} = -5.(-3)^{n-3}$

35. *Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa). Tính (chính xác đến hàng phần trăm) khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau 7314 ngày (khoảng 20 năm).*

Giải

Kí hiệu u_n (gam) là khối lượng còn lại của 20 gam poloni sau n chu kì bán rã. Ta có 7314 ngày gồm 53 (= 7314 : 138) chu kì bán rã. Như thế, theo đề bài, ta cần tính u_{53}.

Từ giả thiết của bài toán suy ra dãy số (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 20 : 2 = 10$ và công bội $q = \frac{1}{2}$. Do đó :

$$u_{53} = 10 . \left(\frac{1}{2}\right)^{52} \approx 2,22.10^{-15} \text{ (gam)}$$

36. *Tính các tổng sau :*

a) Tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết rằng số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39366;

b) Tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết rằng số hạng đầu bằng $\frac{1}{256}$*, số hạng thứ hai bằng* $\frac{-1}{512}$ *và số hạng cuối bằng* $\frac{1}{1048576}$*.*

Giải

a) Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho.

Ta có $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{54}{18} = 3$.

Giả sử cấp số nhân có n số hạng ta có :

$$39366 = u_n = u_1.q^{n-1} = 18 . 3^{n-1}$$

$$\Rightarrow 3^{n-1} = \frac{39366}{18} = 2187 = 3^7 \Rightarrow n = 8$$

$$\Rightarrow S_8 = u_1 . \frac{1-q^8}{1-q} = 18 . \frac{1-3^8}{1-3} = 59040$$

b) Tương tự : $q = \frac{u_2}{u_1} = -\frac{1}{2}$

$$u_n = u_1.q^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{1048576} = \frac{1}{256}.\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow n = 13 \Rightarrow S_{13} = \frac{1}{256} . \frac{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^{13}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2731}{2^{10}} = \frac{2731}{1048576}$$

37. *Số đo bốn góc của một tứ giác lồi lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm bốn góc đó, biết rằng số đo của góc lớn nhất gấp 8 lần số đo của góc nhỏ nhất.*

● **Giải**

Kí hiệu A, B, C, D là số đo bốn góc (tính theo đơn vị độ) của tứ giác lồi đã cho. Không mất tổng quát, giả sử $A \le B \le C \le D$. Khi đó, từ giả thiết của bà toán ta có $D = 8A$, và A, B, C, D theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân Gọi q là công bội của cấp số nhân đó, ta có :

$$8A = D = A.q^3 \Leftrightarrow q = 2.$$

Do đó $360 = A + B + C + D = A\,.\,\dfrac{1 - 2^4}{1 - 2} = 15A \Leftrightarrow A = 24$ (độ)

Suy ra $B = A\,.\,2 = 48$ (độ), $C = A.2^2 = 96$ (độ) và $D = A.2^3 = 192$ (độ)

38. *Hãy chọn những khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây :*

a) Nếu các số thực a, b, c mà $abc \ne 0$, theo thứ tự đó lập thành một cấp s cộng với công sai khác 0 thì các số $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ theo thứ tự đó cũng lập thànl một cấp số cộng.

b) Nếu các số thực a, b, c mà $abc \ne 0$, theo thứ tự đó lập thành một cấp s nhân thì các số $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số nhân.

c) $1 + \pi + \pi^2 + \ldots + \pi^{100} = \dfrac{\pi^{100} - 1}{\pi - 1}$

● **Giải**

a) Sai vì 1, 2, 3 là cấp số cộng nhưng $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ không là cấp số cộng.

b) Đúng vì nếu a, b, c là cấp số nhân công bội $q \ne 0$ thì $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ là cấp số nhân công bội $\frac{1}{q}$.

c) Sai vì $1 + \pi + \pi^2 + \ldots + \pi^{100} = \dfrac{\pi^{101} - 1}{\pi - 1}$.

39. *Các số $x + 6y$, $5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồn thời, các số $x - 1$, $y + 2$, $x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Hãy tìn x và y.*

● **Giải**

Vì các số $x + 6y$, $5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp s cộng nên :

$$2(5x + 2y) = (x + 6y) + (8x + y) \Leftrightarrow x = 3y \qquad (1)$$

Vì các số $x - 1$, $y + 2$, $x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân nên :

$$(y + 2)^2 = (x - 1)(x - 3y) \qquad (2)$$

Thế (1) vào (2), ta được $(y + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$. Từ đó $x = -6$

40. *Cho cấp số cộng (u_n) với công sai khác 0. Biết rằng các số u_1u_2, u_2u_3 và u_3u_1 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội $q \neq 0$. Hãy tìm q.*

Giải

Vì cấp số cộng (u_n) có công sai khác 0 nên các số u_1, u_2, u_3 đôi một khác nhau $\Rightarrow u_1 \cdot u_2 \neq 0$ và $q \neq 1$.

Ta có $u_2u_3 = u_1u_2.q$ và $u_3u_1 = u_1u_2.q^2$.

Từ đó suy ra $u_3 = u_1q = u_2q^2$ (vì $u_1u_2 \neq 0$). Do đó $u_1 = u_2q$ (vì $q \neq 0$ theo giả thiết)

Vì u_1, u_2, u_3 là một cấp số cộng nên $u_1 + u_3 = 2u_2$, suy ra :

$$u_2(q + q^2) = 2u_2 \Leftrightarrow q^2 + q - 2 = 0 \text{ (vì } u_2 \neq 0) \Leftrightarrow q = -2 \text{ (vì } q \neq 1)$$

41. *Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.*

Giải

Kí hiệu (u_n) là cấp số cộng đã cho và gọi q là công bội của cấp số nhân u_2, u_1, u_3. Theo đề bài, ta cần tính q.

Vì cấp số cộng (u_n) có công sai khác 0 nên các số u_1, u_2, u_3 đôi một khác nhau, suy ra $q \notin \{0, 1\}$ và $u_2 \neq 0$.

Từ các giả thiết của đề bài ta có $u_1 = u_2q$, $u_3 = u_2q^2$ và $u_1 + u_3 = 2u_2$, suy ra

$$u_2(q + q^2) = 2u_2 \Leftrightarrow q^2 + q - 2 = 0 \text{ (vì } u_2 \neq 0) \Leftrightarrow q = -2 \text{ (vì } q \neq 1)$$

42. *Hãy tìm ba số hạng đầu tiên của một cấp số nhân, biết rằng tổng của chúng bằng $\frac{148}{9}$ và đồng thời các số hạng đó tương ứng là số hạng đầu, số hạng thứ tư và số hạng thứ tám của một cấp số cộng.*

Giải

Kí hiệu u_1, u_2, u_3 lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ hai và thứ ba của cấp số nhân nói trong đề bài; gọi q là công bội của cấp số nhân đó.

Gọi d là công sai của cấp số cộng nhận u_1, u_2 và u_3 tương ứng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám.

Ta có $u_1 \neq 0$, vì nếu ngược lại thì $u_2 = u_3 = 0$, và do đó $u_1 + u_2 + u_3 = 0 \neq \frac{148}{9}$.

Từ các giả thiết của đề bài ta có : $u_2 = u_1q = u_1 + 3d$ và $u_3 = u_2q = u_2 + 4d$

Suy ra $\quad u_1(q - 1) = 3d \quad (1)$

$\quad\quad\quad\quad u_2(q - 1) = 4d \quad (2)$

Xét hai trường hợp sau :

* *Trường hợp 1 :* $q \neq 1$. Khi đó (1) và (2) suy ra $d \neq 0$ (do $u_1 \neq 0$) và $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{3}$

$$\text{Từ đó : } \frac{148}{9} = u_1 + u_2 + u_3 = u_1 . \frac{1-q^3}{1-q} = u_1 . \frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^3}{1-\frac{4}{3}} = u_1 . \frac{37}{9} \Rightarrow u_1 = 4$$

$$\Rightarrow u_2 = u_1q = \frac{16}{3} \Rightarrow u_3 = u_2q = \frac{64}{9}$$

Ta có ba số vừa tìm được ở trên là các số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng có công sai $d = \frac{4}{9}$.

* *Trường hợp 2 :* $q = 1$. Khi đó $u_1 = u_2 = u_3$. Vì thế $\frac{148}{9} = 3u_1$.

Suy ra $u_1 = u_2 = u_3 = \frac{148}{27}$

Hiển nhiên ba số vừa tìm được ở trên là các số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng với công sai $d = 0$. Vậy có hai bộ ba số cần tìm là :

$u_1 = 4$, $u_2 = \frac{16}{3}$, $u_3 = \frac{64}{9}$ và $u_1 = u_2 = u_3 = \frac{148}{27}$.

43. *Cho dãy số (u_n) xác định bởi :*

$u_1 = 1$ *và* $u_{n+1} = 5u_n + 8$ *với mọi* $n \geq 1$.

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n) với $v_n = u_n + 2$ là một cấp số nhân. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đó.

b) Dựa vào kết quả phần a). Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Giải

a) Từ hệ thức xác định dãy số (u_n), suy ra với mọi $n \geq 1$, ta có :

$u_{n+1} + 2 = 5(u_n + 2)$ hay $v_{n+1} = 5v_n$

Do đó (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 + 2 = 3$ và công bội $q = 5$.

Số hạng tổng quát : $v_n = 3.5^{n-1}$

b) $u_n = v_n - 2 = 3.5^{n-1} - 2$ với mọi $n \geq 1$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Cho ba số* $\frac{2}{b-a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b-c}$ *lập thành cấp số cộng, chứng minh a, b, c lập thành cấp số nhân.*

2. *Cho cấp số nhân (a_n) có $a_n = 5$, $a_5 = 135$, $a_6 = -405$. Tính a_1 và q.*

3. *Cho cấp số nhân (a_n), chứng minh :*

a) $a_1a_p = a_qa_{p-q+1}$ $(p \geq q)$; *b)* $a_pa_q = a_ma_n$ *với* $p + q = m + n$

4. *Cho 3 số a, b, c lập thành cấp số nhân. Chứng minh rằng :*

$$(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$$

Áp dụng : Tìm ba số liên tiếp của cấp số nhân biết tổng là 14 và tổng bình phương là 84.

Hướng dẫn : Vì $(a + c)^2 - b^2 = a^2 + c^2 + 2ac - b^2 = a^2 + b^2 + c^2$

5. *Cho cấp số nhân* (a_n) *biết* $a_1 + a_5 = 51$, $a_2 + a_6 = 102$. *Tìm n biết* $S_n = 3069$.

Hướng dẫn : Tìm được $a_1 = 3$, $q = 2$

Áp dụng công thức : $S_n = a_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$ suy ra $n = 10$.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

44. *Chứng minh rằng :* $1.2^2 + 2.3^2 + ... + (n - 1).n^2 = \dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$ (1) *với mọi số nguyên* $n \geq 2$.

Giải

Với n = 2 ta có : $1.2^2 = \dfrac{2(2^2-1)(3.2+2)}{12} = 4$

Vậy (1) đúng với n = 2.

Giả sử (1) đúng với n = k, tức là ta có :

$$1.2^2 + 2.3^2 + ... + (k - 1).k^2 = \frac{k(k^2-1)(3k+2)}{12}$$

Khi đó ta có :

$$1.2^2 + 2.3^2 + ... + (k - 1).k^2 + k.(k + 1)^2$$
$$= \frac{k(k^2-1)(3k+2)}{12} + k(k + 1)^2$$
$$= \frac{k(k+1)[(k-1)(3k+2)+12(k+1)]}{12} = \frac{k(k+1)(3k^2+11k+10)}{12}$$
$$= \frac{k(k+1)[(3k(k+2)+5(k+2)]}{12} = \frac{(k+1)(k^2+2k)(3k+5)}{12}$$
$$= \frac{(k+1)[(k+1)^2-1][3(k+1)+2]}{12}$$

Điều đó chứng tỏ (1) cũng đúng khi n = k + 1

Từ các chứng minh trên suy ra (1) đúng với mọi $n \geq 2$.

45. *Cho dãy số* (u_n) *xác định bởi* $u_1 = 2$ *và* $u_n = \dfrac{u_{n-1}+1}{2}$ *với mọi* $n \geq 2$.

Chứng minh rằng : $u_n = \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$ (1) *với mọi số nguyên dương n.*

Giải

Với n = 1, theo giả thiết ta có $u_1 = 2 = \frac{2^{1-1}+1}{2^{1-1}}$. Như vậy (1) đúng khi n = 1.

Giả sử (1) đúng khi n = k, $k \in N^*$.

Khi đó, từ hệ thức xác định dãy số (u_n) ta có :

$$u_{k+1} = \frac{u_k + 1}{2} = \frac{\frac{2^{k-1}+1}{2^{k-1}} + 1}{2} = \frac{2^k + 1}{2^k}$$

nghĩa là (1) cũng đúng khi n = k + 1

Vậy (1) đúng với mọi $n \in N^*$.

46. *Cho các dãy số (u_n) và (v_n) với $u_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ và $v_n = \frac{2n}{n+1}$*

a) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (a_n) với $a_n = u_n + v_n$.

b) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (b_n) với $b_n = u_n - v_n$.

c) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (c_n) với $c_n = u_n . v_n$.

d) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (d_n) với $d_n = \frac{u_n}{v_n}$

Chú ý : Các dãy số (a_n), (b_n), (c_n) và (d_n) nêu trên thường được kí hiệu tương ứng bởi $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$, $(u_n.v_n)$ và $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Giải

a) Ta có : $a_n = u_n + v_n = \frac{n^2+1}{n+1} + \frac{2n}{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n+1} = n + 1$

b) $b_n = u_n - v_n = \frac{n^2+1}{n+1} - \frac{2n}{n+1} = \frac{(n-1)^2}{n+1}$

c) $v_n = u_n v_n = \frac{2n(n^2+1)}{(n+1)^2}$

d) $d_n = \frac{u_n}{v_n} = \frac{n^2+1}{2n}$

47. *Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng, dãy số nào là cấp số nhân ? Hãy xác định công sai hoặc công bội của mỗi cấp số đó.*

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 8n + 3$;
b) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$;
c) Dãy số (u_n) với $u_n = 3.8^n$;
d) Dãy số (u_n) với $u_n = (n + 2).3^n$.

Giải

a) Ta có $u_{n+1} - u_n = 8(n + 1) + 3 - (8n + 3) = 8, \forall n \geq 1$

Suy ra (u_n) là cấp số cộng với công sai d = 8.

b) Ta có $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) + 1 - n^2 - n - 1 = 2(n+1)$ không là hằng số. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n^2 + 3n + 3}{n^2 + n + 1}$ không là hằng số nên (u_n) không là cấp số nhân.

c) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3.8^{n+1}}{3.8^n} = 8$ $\forall n \geq 1$. Do đó (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 8$.

d) $u_{n+1} - u_n = (n+3).3^{n+1} - (n+2)3^n = 3^n(3n + 9 - n - 2) = (2n+7)3^n$ không là hằng số nên (u_n) không là cấp số cộng.

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+3).3^{n+1}}{(n+2).3^n} = \dfrac{3n+9}{n+2}$ không là hằng số nên (u_n) không là cấp số nhân.

48. *Hãy chọn những khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây :*

a) Dãy số (u_n) xác định bởi : $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = u_n + 5$ với mọi $n \geq 1$, là một cấp số cộng.

b) Dãy số (u_n) xác định bởi : $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = u_n + n$ với mọi $n \geq 1$, là một cấp số cộng.

c) Dãy số (u_n) xác định bởi : $u_1 = 4$ và $u_{n+1} = 5u_n$ với mọi $n \geq 1$, là một cấp số nhân.

d) Dãy số (u_n) xác định bởi : $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = nu_n$ với mọi $n \geq 1$, là một cấp số nhân.

Trả lời

a) Đúng vì $u_{n+1} - u_n = 5$, $\forall n \geq 1$.

b) Sai vì $u_{n+1} - u_n = n$ không là hằng số.

c) Đúng vì $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 5$ là hằng số.

d) Sai vì $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = n$ không là hằng số.

49. *Cho dãy hình vuông $H_1, H_2, \ldots, H_n$ với mỗi số nguyên dương n, gọi u_n, p_n và S_n lần lượt là độ dài cạnh, chu vi và diện tích hình vuông H_n.*

a) Giả sử dãy số (u_n) là một cấp số cộng với công sai khác 0. Hỏi khi đó các dãy số (p_n) và (S_n) có phải là các cấp số cộng hay không ? Vì sao ?

b) Giả sử dãy số (u_n) là một cấp số nhân với công bội dương. Hỏi khi đó các dãy số (p_n) và (S_n) có phải là các cấp số nhân hay không ? Vì sao ?

Giải

Theo giả thiết ta có :

$$p_n = 4u_n \text{ và } S_n = u_n^2 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n), $d \neq 0$. Khi đó với mọi $n \in N^*$, ta có :

$p_{n+1} - p_n = 4(u_{n+1} - u_n) = 4d$ (không đổi)

Vậy (p_n) là cấp số cộng.

$S_{n+1} - S_n = (u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) = d(u_{n+1} + u_n)$ không là hằng số (do $d \neq 0$)

Vậy (S_n) không là cấp số cộng.

b) Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n), $q > 0$. Khi đó với mọi $n \in N^*$, ta có :

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{4u_{n+1}}{4u_n} = q \text{ (không đổi)}$$

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n^2} = q^2 \text{ (không đổi)}$$

Từ đó suy ra các dãy số (p_n) và (S_n) là cấp số nhân.

50. *Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng (u_n) vừa là cấp số cộng, vừa là cấp số nhân.*

Giải

Ta chứng minh $u_n = 3$ (1) với mọi n bằng qui nạp

Với $n = 1$ ta có $u_1 = 3$: (1) đúng

Giả sử $u_k = 3$ ta chứng minh $u_{k+1} = 3$

Thật vậy ta có $u_{k+1} = \sqrt{u_k + 6} = \sqrt{3 + 6} = 3$

Vậy $u_n = 3$, $\forall n \geq 1$ do đó (u_n) vừa là cấp số cộng công sai $d = 0$ vừa là cấp số nhân công bội $q = 1$.

51. *Tìm hiểu tiền công khoan giếng ở hai cơ sở khoan giếng, người ta được biết :*

- *Ở cơ sở A : Giá của mét khoan đầu tiên là 8000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 500 đồng so với giá của mét khoan ngay trước nó.*
- *Ở cơ sở B : Giá của mét khoan đầu tiên là 6000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 7% giá của mét khoan ngay trước nó.*

Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu u_n và v_n tương ứng là giá của mét khoan thứ n theo cách tính giá của cơ sở A và cơ sở B.

a) Hãy tính u_2, u_3, v_2, v_3.

b) Chứng minh rằng dãy số (u_n) là một cấp số cộng và dãy số (v_n) là một cấp số nhân. Hãy tìm số hạng tổng quát của mỗi dãy số đó.

c) Một người muốn chọn một trong hai cơ sở nói trên để thuê khoan một giếng sâu 20 mét lấy nước dùng cho sinh hoạt của gia đình. Hỏi người ấy *nên chọn ở cơ sở nào, chất lượng cũng như thời gian khoan giếng của hai cơ sở là như nhau ?*

d) Cũng câu hỏi như phần c), với giả thiết độ sâu của giếng cần khoan là 25 mét.

Giải

a) $u_2 = u_1 + 500 = 8000 + 500 = 8500;$

$u_3 = u_2 + 500 = 8500 + 500 = 9000$

$v_2 = v_1 + v_1 \,.\, 0{,}07 = v_1(1 + 0{,}07) = v_1 \,.\, 1{,}07 = 6000 \,.\, 1{,}07 = 6420;$

$v_3 = v_2 + v_2 \,.\, 0{,}07 = v_2(1 + 0{,}07) = v_2 \,.\, 1{,}07$

$= 6420 \,.\, 1{,}07 = 6869{,}4$

b) Theo giả thiết của bài toán, ta có :

$u_1 = 8000$ và $u_{n+1} = u_n + 500$ với mọi $n \geq 1$ (1)

$v_1 = 6000$ và $v_{n+1} = v_n + v_n \,.\, 0{,}07$

$= v_n(1 + 0{,}07) = v_n \,.\, 1{,}07$ với mọi $n \geq 1$ (2)

Từ (1) suy ra (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 500$ và số hạng đầu $u_1 = 8000$.

Số hạng tổng quát : $u_n = 8000 + (n - 1).500 = 7500 + 500n.$

Từ (2) suy ra (v_n) là một cấp số nhân với công bội $q = 1{,}07$ và số hạng đầu $v_1 = 6000$.

Số hạng tổng quát : $v_n = 6000 \,.\, (1{,}07)^{n-1}$

c) Kí hiệu A_{20} và B_{20} tương ứng là số tiền công (tính theo đơn vị đồng) cần trả theo cách tính giá của cơ sở B. Từ kết quả phần b) ta có :

A_{20} là tổng 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n). Do đó :

$$A_{20} = \frac{20.(2u_1 + 19d)}{2} = 10 \,.\, (2 \,.\, 8000 + 19 \,.\, 500) = 255000$$

B_{20} là tổng 20 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (v_n). Do đó :

$$B_{20} = \frac{1 - q^{20}}{1 - q} = 6000 \,.\, \frac{1 - (1{,}07)^{20}}{1 - 1{,}07} = 245972{,}95392...$$

Từ đó, nếu cần khoan giếng sâu 20m thì nên thuê cơ sở B.

d) Kí hiệu A_{25} và B_{25} tương ứng là số tiền công (tính theo đơn vị đồng) cần trả theo cách tính giá của cơ sở A và theo cách tính giá của cơ sở B.

Bằng cách tương tự như ở phần c) ta tính được $A_{25} = 350000$ và

$B_{25} = 379494{,}22629...$

Do đó, nếu cần khoan giếng sâu 25m thì nên thuê cơ sở A.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

52. *Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai :*

a) Tồn tại một cấp số nhân (u_n) *có* $u_5 < 0$ *và* $u_{75} > 0$.

b) Nếu các số thực a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có công sai khác 0 thì các số a^2, b^2, c^2 *theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số cộng.*

c) Nếu các số thực a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân thì các số a^2, b^2, c^2 *theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số nhân.*

● ***Trả lời***

a) Sai vì $\dfrac{u_{75}}{u_5} = q^{70} > 0$

b) Sai chẳng hạn 1, 2, 3 là cấp số cộng nhưng 1, 4, 8 không là cấp số cộng.

c) Đúng vì nếu a, b, c, là cấp số nhân công bội q thì các số a^2, b^2, c^2 là cấp số nhân công bội q^2.

53. *Cho dãy số* (u_n) *xác định bởi* $u_1 = \dfrac{1}{2}$ *và* $u_n = u_{n-1} + 2n$ *với mọi* $n \geq 2$. *Khi đó* u_{50} *bằng :*

(A) 1274,5　　*(B) 2548,5*

(C) 5096,5　　*(D) 2550,5*

● ***Trả lời***

Ta có $u_n - u_{n-1} = 2n$

$$\Rightarrow u_{50} = (u_{50} - u_{49}) + (u_{49} - u_{48}) + \ldots + (u_2 - u_1) + u_1$$

$$= 2(50 + 49 + \ldots. + 2) + \frac{1}{2} = 2 \, . \, \frac{50.51}{2} + 0{,}5 - 2 = 2548{,}5$$

Chọn (B)

54. *Cho dãy số* (u_n) *xác định bởi :*

$u_1 = -1$, $u_n = 2n \, . \, u_{n-1}$ *với mọi* $n \geq 2$. *Khi đó* u_n *bằng :*

(A) $2^{10} \, . \, 11\,!$　　*(B)* $-2^{10} \, . \, 11\,!$

(C) $2^{10} \, . \, 11^{10}$　　*(D)* $-2^{10} \, . \, 11^{10}$

● ***Trả lời***

Ta có $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = 2n$

$$\Rightarrow u_{11} = \frac{u_{11}}{u_{10}} . \frac{u_{10}}{u_9} \ldots \frac{u_2}{u_1} . u_1$$

$$= (2 \, . \, 11)(2 \, . \, 10) \ldots (2 \, . \, 2) \, . \, (-1) = -2^{10} \, . \, 11\,!$$

Chọn (B)

55. *Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $u_1 = 150$ và $u_n = u_{n-1} - 3$ với mọi $n \geq 2$. Khi đó tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số đó bằng :*

(A) 150 *(B) 300* *(C) 29850* *(D) 59700*

Trả lời

Ta có $u_n - u_{n-1} = -3$

$\Rightarrow (u_n)$ là cấp số cộng công sai $d = -3$

$$S_{100} = \frac{100(2u_1 + 99d)}{2} = 50(300 - 297) = 150$$

Chọn (A)

56. *Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 2001$ và $u_5 = 1995$. Khi đó u_{1001} bằng :*

(A) 4005 *(B) 4003* *(C) 3* *(D) 1*

Trả lời

Ta có $\begin{cases} u_1 + 4d = 1995 \\ u_1 + d = 2001 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -2 \\ u_1 = 2003 \end{cases}$

$\Rightarrow u_{1001} = u_1 + 1000d = 2003 - 2000 = 3$

Chọn (C)

57. *Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$, $u_5 = 54$*

Khi đó tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng :

(A) $\frac{1 - 3^{1000}}{4}$ *(B)* $\frac{3^{1000} - 1}{2}$ *(C)* $\frac{3^{1000} - 1}{6}$ *(D)* $\frac{1 - 3^{1000}}{6}$

Trả lời

Ta có $u_5 = u_1q^4$, $u_2 = u_1q$

$\Rightarrow q^3 = \frac{54}{-2} = -27 \Rightarrow q = -3,\ u_1 = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow S_{1000} = u_1 . \frac{1 - q^{1000}}{1 - q} = \frac{2}{3} . \frac{1 - 3^{1000}}{4} = \frac{1 - 3^{1000}}{6}$

Chọn (D).

Chương 4 GIỚI HẠN

A. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

§1. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa dãy số có giới hạn 0 :

Dãy số (u_n) có giới hạn 0 (hay có giới hạn là 0) nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.

Khi đó ta viết :

$$\lim(u_n) = 0 \text{ hoặc } \lim u_n = 0 \text{ hoặc } u_n \to 0$$

(Kí hiệu "$\lim u_n = 0$*" còn được viết "* $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$*", đọc là dãy số* (u_n) *có giới hạn là 0 khi n dần đến vô cực).*

Chú ý :

a) $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \lim |u_n| = 0$

b) $\lim 0 = 0$

2. Một số dãy số có giới hạn 0 :

Định lí 1 :

Cho hai dãy số (u_n) *và* (v_n)

Nếu $|u_n| \le v_n$ *với mọi n và* $\lim v_n = 0$ *thì* $\lim u_n = 0$.

Định lí 2 :

$$\boxed{\text{Nếu } |q| < 1 \text{ thì } \lim q^n = 0}$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. *Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0 :*

a) $\dfrac{(-1)^n}{n+5}$; b) $\dfrac{\sin n}{n+5}$; c) $\dfrac{\cos 2n}{\sqrt{n}+1}$.

Giải

a) Ta có $\left|\dfrac{(-1)^n}{n+5}\right| = \dfrac{1}{n+5} < \dfrac{1}{n}$ và $\lim\dfrac{1}{n} = 0 \quad \Rightarrow \lim\dfrac{(-1)^n}{n+5} = 0$

b) $\left|\frac{\sin n}{n+5}\right| \le \frac{1}{n+5} < \frac{1}{n}$ và $\lim\frac{1}{n} = 0 \qquad \Rightarrow \lim\frac{\sin n}{n+5} = 0$

c) $\left|\frac{\cos 2n}{\sqrt{n}+1}\right| \le \frac{1}{\sqrt{n}+1} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\lim\frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\frac{\cos 2n}{\sqrt{n}+1} = 0$

2. *Chứng minh rằng hai dãy số (u_n) và (v_n) với :*

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}; \qquad v_n = \frac{(-1)^n \cos n}{n^2+1}$$

có giới hạn 0.

Giải

Ta có $|u_n| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n}$ và $\lim\frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0$

$$|v_n| = \left|\frac{(-1)^n \cos n}{n^2+1}\right| = \frac{|\cos n|}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \text{ và } \lim\frac{1}{n^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim v_n = 0$$

3. *Chứng minh rằng các dãy số (u_n) sau đây có giới hạn 0 :*

a) $u_n = (0{,}99)^n$; b) $u_n = \frac{(-1)^n}{2^n+1}$; c) $u_n = -\frac{\sin\frac{n\pi}{5}}{(1{,}01)^n}$.

Giải

a) Ta có $|0{,}99| < 1$ nên $\lim u_n = \lim(0{,}99)^n = 0$

b) $$|u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{2^n+1}\right| = \frac{1}{2^n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n, \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$\Rightarrow \lim u_n = 0$

c) $$|u_n| = \frac{\left|\sin\frac{n\pi}{5}\right|}{(1{,}01)^n} \le \left(\frac{1}{1{,}01}\right)^n, \lim\left(\frac{1}{1{,}01}\right)^n = 0$$

$\Rightarrow \lim u_n = 0$

4. *Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{3^n}$*

a) Chứng minh rằng $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{2}{3}$ với mọi n.

b) Bằng phương pháp qui nạp, chứng minh rằng $0 < u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ với mọi n.

c) Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0.

Giải

a) Ta có : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{3^{n+1}} : \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{n+1}{n}$

$= \dfrac{1}{3}(1 + \dfrac{1}{n}) \leq \dfrac{2}{3}, \forall n \geq 1.$

b) Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \geq 1$.

Ta chứng minh $u_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ (1)

Với n = 1 ta có $u_1 = \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{2}{3}$

Vậy (1) đúng với n = 1

Giả sử (1) đúng với n = k, tức là ta có :

$u_k \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^k$

Khi đó $u_{k+1} \leq \dfrac{2}{3} u_k$ (theo câu a/)

$\Rightarrow u_{k+1} \leq \dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^k = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k+1}$

Vậy (1) đúng với n = k + 1 nên (1) đúng với mọi n.

c) Ta có $0 < u_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \Rightarrow |u_n| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

Mà $\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim|u_n| = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0$

BÀI TẬP LÀM THÊM

Chứng minh các dãy số (u_n) sau có giới hạn 0 :

a) $u_n = \dfrac{2\sin n + 3\cos n}{n^2 + 1}$; *b)* $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$

Hướng dẫn : $n > 1 : \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2.2....2}{1.2...n} < \dfrac{4}{n}$

§2. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN

TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa dãy số có giới hạn hữu hạn :

Dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L nếu $\lim(u_n - L) = 0$. Khi đó ta viết :

$\lim(u_n) = L$ hoặc $\lim u_n = L$ hoặc $u_n \to L$

Dãy số có giới hạn là một số thực gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

2. Một số định lí :

Định lí 1 :

Giả sử $\lim u_n = L$. *Khi đó :*

a) $\lim |u_n| = |L|$ *và* $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$;

b) *Nếu* $u_n \ge 0$ *với mọi n thì* $L \ge 0$ *và* $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$

Định lí 2 :

Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ *và c là một hằng số. Khi đó :*

$\lim(u_n + v_n) = L + M$

$\lim(u_n - v_n) = L - M$

$\lim(u_n . v_n) = L.M$

$\lim(cu_n) = cL$

$\lim\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$)

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn :

$$\boxed{S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}} \quad \text{với } |q| < 1$$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

5. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\left(2 + \dfrac{(-1)^n}{n+2}\right)$; b) $\lim\left(\dfrac{\sin 3n}{4n} - 1\right)$;

c) $\lim\dfrac{n-1}{n}$; d) $\lim\dfrac{n+2}{n+1}$.

Giải

a) Đặt $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n+2}$

Ta có $|u_n - 2| = \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n}$ và $\lim\frac{1}{n} = 0$

$$\Rightarrow \lim(u_n - 2) = 0 \quad \Rightarrow \lim u_n = 2$$

b) Đặt $u_n = \frac{\sin 3n}{4n} - 1$

Ta có $|u_n + 1| = \left|\frac{\sin 3n}{4n}\right| \le \frac{1}{4n}$ và $\lim\frac{1}{4n} = 0$

$$\Rightarrow \lim(u_n + 1) = 0 \Rightarrow \lim u_n = -1$$

c) $\lim\frac{n-1}{n} = \lim(1 - \frac{1}{n}) = \lim 1 - \lim\frac{1}{n} = 1$

d) $\lim\frac{n+2}{n+1} = \lim\frac{n(1+\frac{2}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim 1 + \lim\frac{2}{n}}{\lim 1 + \lim\frac{1}{n}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$

6. *Tìm $\lim u_n$ với*

a) $u_n = \frac{n^2 - 3n + 5}{2n^2 - 1}$;

b) $u_n = \frac{-2n^2 + n + 2}{3n^4 + 5}$;

c) $u_n = \frac{\sqrt{2n^2 - n}}{1 - 3n^2}$;

d) $u_n = \frac{4^n}{2.3^n + 4^n}$.

Giải

a) Ta có $u_n = \lim\frac{n^2(1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2})}{n^2(2 - \frac{1}{n^2})} = \lim\frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}}$

$$= \frac{\lim 1 - \lim\frac{3}{n} + \lim\frac{5}{n^2}}{\lim 2 - \lim\frac{1}{n^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim u_n = \lim\frac{n^4(\frac{-2}{n^2} + \frac{1}{n^3} + 2)}{n^4(3 + \frac{5}{n^4})} = \lim\frac{\frac{-2}{n^2} + \frac{1}{n^3} + 2}{3 + \frac{5}{n^4}} = \frac{0}{3} = 0$

c) $\lim u_n = \lim\frac{n^2\sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}}{n^2(\frac{1}{n^2} - 3)} = \lim\frac{\sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}}{\frac{1}{n^2} - 3} = \frac{0}{-3} = 0$

d) Chia tử và mẫu u_n cho 4^n ta được :

$$\lim u_n = \lim\frac{1}{2.\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} = 1 \text{ vì } \lim\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

7. *Cho dãy số (u_n) xác định bởi :*

$$u_1 = 10 \text{ và } u_{n+1} = \frac{u_n}{5} + 3 \text{ với mọi } n \geq 1$$

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n - \frac{15}{4}$ là một cấp số nhân.

b) Tìm $\lim u_n$.

Giải

a) Ta có $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{15}{4} = \frac{u_n}{15} + 3 - \frac{15}{4} = \frac{u_n}{5} - \frac{3}{4}$

Thay $u_n = v_n + \frac{15}{4}$ vào ta được :

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}(v_n + \frac{15}{4}) - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}v_n, \forall n$$

Vậy (v_n) là cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{5}$

b) Ta có $v_1 = u_1 - \frac{15}{4} = 10 - \frac{15}{4} = \frac{25}{4}$

$$v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = \frac{25}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim v_n = 0 \Rightarrow \lim u_n = \frac{15}{4}$$

8. *Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC, tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$,..., tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n$... Gọi $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ và $S_1, S_2, \ldots, S_n\ldots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$,.., $A_nB_nC_n$...*

a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n);

b) Tìm các tổng : $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$ và $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$

Giải

a) Ta có : $p_1 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$; $p_2 = \frac{3a}{4} = \frac{3a}{2^2}, \ldots, p_n = \frac{3a}{2^n}$

(chứng minh bằng qui nạp)

Vì $\lim \frac{1}{2^n} = \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ nên $\lim p_n = 0$

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Diện tích tam giác $A_1B_1C_1$ là $S_1 = \frac{S}{4}$.

Bằng phương pháp qui nạp, ta chứng minh được rằng diện tích tam giác $A_nB_nC_n$ là $S_n = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$

Vì $\lim\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ nên $\lim S_n = 0$

b) Ta có (p_n) là cấp số nhân lùi vô hạn có công bội $q = \frac{1}{2}$, do đó :

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = \frac{p_1}{1 - \frac{1}{2}} = 2p_1 = 3a$$

(S_n) là cấp số nhân lùi vô hạn có công bội $q' = \frac{1}{4}$ do đó :

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots = \frac{S_1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}S_1 = \frac{S}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$$

9. *Biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số :*

a) 0,444.. ; *b) 0,2121... ;* *c) 0,32111...*

Giải

a) Ta có : $0{,}444\ldots = 0{,}4 + 0{,}04 + 0{,}004 + \ldots$

$$= \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \ldots = 4\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots\right) = 4.\frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{4}{9}$$

b) $0{,}2121\ldots = 0{,}21 + 0{,}0021 + \ldots$

$$= \frac{21}{10^2} + \frac{21}{10^4} + \ldots = 21\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots\right) = 21\,.\frac{\frac{1}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$$

c) $0{,}32111\ldots = \frac{32}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{100}.\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{1000}.\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \ldots$

$$= \frac{32}{100} + \frac{1}{1000}.\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{32}{100} + \frac{1}{900} = \frac{289}{900}$$

10. *Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$,*

C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$,...

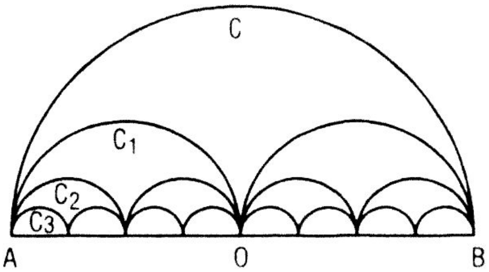
C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{4}$,...

C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}$,...

Gọi p_n là độ dài của C_n, S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB.

a) Tính p_n và S_n

b) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n)



Giải

a) Ta có $p_n = 2^n . \dfrac{R}{2^n} . \pi = \pi R$ với mọi n

$$S_n = 2^n . \left(\frac{R}{2^n}\right)^2 . \frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^2}{2} . \frac{1}{2^n}$$

b) $\lim p_n = \pi R$; $\lim S_n = 0$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\left(3 + \dfrac{(-1)^n \sin n}{n+1}\right)$; *b)* $\lim\dfrac{3n-2}{2n+1}$.

ĐS : a) 3; *b)* $\dfrac{3}{2}$

2. *Tìm các giới hạn $\lim u_n$ với :*

a) $u_n = \dfrac{-n^4 + 3n^2 - 1}{2n^4 + 1}$; *b)* $u_n = \dfrac{3.5^n}{6^{n+1} + 2}$.

ĐS : a) $-\dfrac{1}{2}$; *b) 0*

3. *Tìm tổng của cấp số nhân :*

a) $8, 4, 2, 1, \dfrac{1}{2}, \ldots$; *b)* $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \dfrac{1}{2-\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}, \ldots$

ĐS : a) 16 ; *b)* $4 + 3\sqrt{2}$

§3. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC

TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Dãy số có giới hạn $+\infty$:

Định nghĩa :

Dãy số (u_n) *có giới hạn* $+\infty$ *nếu với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.*

Khi đó ta viết :

$$\lim(u_n) = +\infty \quad \text{hoặc } \lim u_n = +\infty \quad \text{hoặc } u_n \to \infty$$

Chú ý : $\lim n = +\infty$, $\lim\sqrt{n} = +\infty$, $\lim\sqrt[k]{n} = +\infty$ $(k \in N^*)$

2. Dãy số có giới hạn $-\infty$:

Định nghĩa :

Dãy số (u_n) *có giới hạn* $-\infty$ *nếu với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó.*

Khi đó ta viết :

$$\lim(u_n) = -\infty \quad \text{hoặc } \lim u_n = -\infty \quad \text{hoặc } u_n \to -\infty$$

Định lí :

Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ *thì* $\lim\dfrac{1}{u_n} = 0$

3. Một vài qui tắc tìm giới hạn vô cực :

a) Qui tắc 1 :

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ *và* $\lim v_n = \pm\infty$ *thì* $\lim(u_nv_n)$ *được cho trong bảng sau :*

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_nv_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

b) Qui tắc 2 :

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ *và* $\lim v_n = L \neq 0$ *thì* $\lim(u_nv_n)$ *được cho trong bảng sau :*

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

c) Qui tắc 3 :

Nếu $\lim u_n = L \neq 0$, $\lim v_n = 0$ *và* $v_n > 0$ *hoặc* $v_n < 0$ *kể từ một số hạng nào đó trở đi thì* $\lim\dfrac{u_n}{v_n}$ *được cho trong bảng sau :*

Dấu của L	*Dấu của* v_n	$\lim\dfrac{u_n}{v_n}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

11. *Tìm giới hạn của các dãy số* (u_n)*, với :*

a) $u_n = -2n^3 + 3n + 5$; b) $u_n = \sqrt{3n^4 + 5n^3 - 7n}$

Giải

a) Ta có $u_n = n^3\left(-2 + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{5}{n^3}\right)$

Vì $\lim n^3 = +\infty$ và $\lim\left(-2 + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{5}{n^3}\right) = -2 < 0$

nên $\lim u_n = -\infty$

b) Ta có $u_n = n^2\sqrt{3 + \dfrac{5}{n} - \dfrac{7}{n^3}}$

Vì $\lim n^2 = +\infty$ và $\lim\sqrt{3 + \dfrac{5}{n} - \dfrac{7}{n^3}} = \sqrt{3} > 0$

nên $\lim u_n = +\infty$

12. *Tìm giới hạn của các dãy số* (u_n) *với :*

a) $u_n = \dfrac{-2n^3 + 3n - 2}{3n - 2}$; b) $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12}$

Giải

a) Ta có $u_n = \dfrac{n^3\left(-2+\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}\right)} = \dfrac{-2+\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}}{\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}}$

Vì $\lim\left(-2+\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{2}{n^2}\right) = -2 < 0$

và $\lim\left(\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{2}{n^2}\right) = 0$; $3n - 2 > 0$

nên $\lim u_n = -\infty$

b) Chia tử và mẫu của phân thức cho n, ta được :

$$u_n = \frac{n\sqrt[3]{1-\dfrac{7}{n^3}-\dfrac{5}{n^5}+\dfrac{8}{6}}}{1+\dfrac{12}{n}}$$

Vì $\lim n\sqrt[3]{1-\dfrac{7}{n^3}-\dfrac{5}{n^5}+\dfrac{8}{6}} = +\infty$

và $\lim\left(1+\dfrac{12}{n}\right) = 1 > 0$

nên $\lim u_n = +\infty$

13. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim(2n + \cos n)$; *b)* $\lim(\frac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5)$.

Giải

a) Ta có $2n + \cos n = n(2 + \dfrac{\cos n}{n})$

$$\left|\frac{\cos n}{n}\right| \le \frac{1}{n},\ \lim\frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim\frac{\cos n}{n} = 0$$

Do đó $\lim(2 + \dfrac{\cos n}{n}) = 2 > 0$ và $\lim n = +\infty$

Suy ra $\lim(2n + \cos n) = +\infty$

b) $\lim(\dfrac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5) = \lim n^2(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sin 2n}{n} + \dfrac{5}{n^2}) = +\infty$

vì $\lim n^2 = +\infty$ và $\lim(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sin 2n}{n} + \dfrac{5}{n^2}) = \dfrac{1}{2} > 0$

14. *Chứng minh rằng nếu* $q > 1$ *thì* $\lim q^n = +\infty$.

Giải

Ta có $\lim\left(\dfrac{1}{q}\right)^n = 0$ (do $q > 1$) mà $q > 0$ nên $\lim q^n = +\infty$

15. *Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với :*

a) $u_n = \dfrac{3^n + 1}{2^n - 1}$;　　　　b) $u_n = 2^n - 3^n$.

Giải

a) Chia tử và mẫu cho 3^n ta được : $u_n = \dfrac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

$$\lim\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 1 > 0 \text{ và } \lim\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 0;\ 2^n - 1 > 0$$

nên $\lim u_n = +\infty$

b) $u_n = 3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right]$

$$\lim\ 3^n = +\infty \text{ và } \lim\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right] = -1 < 0$$

nên $\lim u_n = -\infty$

16. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\dfrac{n^2 + 4n - 5}{3n^3 + n^2 + 7}$;　　　　b) $\lim\dfrac{n^5 + n^4 - 3n - 2}{4n^3 + 6n^2 + 9}$;

c) $\lim\dfrac{\sqrt{2n^4 + 3n - 2}}{2n^2 - n + 3}$;　　　　d) $\lim\dfrac{3^n - 2.5^n}{7 + 3.5^n}$.

Giải

a) $$\lim\frac{n^2 + 4n - 5}{3n^3 + n^2 + 7} = \lim\frac{n^3\left(\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(3 + \frac{1}{n} + \frac{7}{n^3}\right)} = \lim\frac{\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{7}{n^3}} = \frac{0}{3} = 0$$

b) $$\lim\frac{n^5 + n^4 - 3n - 2}{4n^3 + 6n^2 + 9} = \lim n^2\frac{n^3\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^4} - \frac{2}{n^5}\right)}{n^3\left(4 + \frac{6}{n} + \frac{9}{n^3}\right)}$$

$$= \lim n^2\frac{\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^4} - \frac{2}{n^5}\right)}{\left(4 + \frac{6}{n} + \frac{9}{n^3}\right)} = +\infty$$

c) $\lim\dfrac{\sqrt{2n^4+3n-2}}{2n^2-n+3}=\lim\dfrac{n^2\sqrt{2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}}}{n^2\left(2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)}=\lim\dfrac{\sqrt{2+\dfrac{n}{3}-\dfrac{2}{n^2}}}{2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) Chia tử và mẫu cho 5^n ta được :

$$\lim\frac{3^n-2.5^n}{7+3.5^n}=\lim\frac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n-2}{7.\left(\dfrac{1}{5}\right)^n+3}=-\frac{2}{3}$$

vì $\lim\left(\dfrac{3}{5}\right)^n=\lim\left(\dfrac{1}{5}\right)^n=0$

17. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim(3n^3-7n+11)$; *b)* $\lim\sqrt{2n^4-n^2+n+2}$;

c) $\lim\sqrt[3]{1+2n-n^3}$; *d)* $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}$

Giải

a) $\lim(3n^3-7n+11)=\lim n^3\left(3-\dfrac{7}{n^2}+\dfrac{11}{n^3}\right)=+\infty$

vì $\lim n^3=+\infty$ và $\lim\left(3-\dfrac{7}{n^2}+\dfrac{11}{n^3}\right)=3>0$

b) $\lim\sqrt{2n^4-n^2+n+2}=\lim n^2.\sqrt{2-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^4}}=+\infty$

vì $\lim n^2=+\infty$ và $\lim\sqrt{2-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^4}}=\sqrt{2}>0$

c) $\lim\sqrt[3]{1+2n-n^3}=\lim n\sqrt[3]{\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^2}-1}=-\infty$

vì $\lim n=+\infty$ và $\lim\sqrt[3]{\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^2}-1}=-1<0$

d) $\sqrt{2.3^n-n+2}=(\sqrt{3})^n\sqrt{2-\dfrac{n}{3^n}+\dfrac{2}{3^n}}$ với mọi n.

vì $\lim\dfrac{n}{3^n}=0$ (xem bài tập 4) và $\lim\dfrac{2}{3^n}=0$

nên $\lim\sqrt{2-\dfrac{n}{3^n}+\dfrac{2}{3^n}}=\sqrt{2}>0$

Ngoài ra $\lim(\sqrt{3})^n=+\infty$. Do đó $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}=+\infty$

18. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim(\sqrt{n^2+n+1}-n)$

Hướng dẫn : Nhân và chia biểu thức đã cho với $\sqrt{n^2+n+1}+n$;

b) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$

Hướng dẫn : Nhân tử và mẫu của phân thức đã cho với $\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}$

c) $\lim(\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n+1})$; d) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n+1}}$;

e) $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})n$; f) $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$.

Giải

a) Ta có $\lim(\sqrt{n^2+n+1}-n)=\lim\dfrac{(n^2+n+1)-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$

$$=\lim\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

b) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}=\lim\dfrac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{n+2-n-1}$

$=\lim(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})=+\infty$

c) $\lim(\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n+1})=\lim n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}\right)=+\infty$

vì $\lim n=+\infty$ và $\lim\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}\right)=1>0$

d) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n+1}}=\lim\dfrac{\sqrt{3n+2}+\sqrt{2n+1}}{3n+2-2n-1}=\lim\dfrac{\sqrt{3n+2}+\sqrt{2n+1}}{n+1}$

$$=\lim\frac{n\left(\sqrt{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim\frac{\sqrt{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}}=0$$

e) $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\,.\,n=\lim\dfrac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\lim\sqrt{n}\,.\,\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\sqrt{n}\,.\,\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=+\infty$

vì $\lim\sqrt{n}=+\infty$ và $\lim\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}>0$

f) $$\lim\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}=\lim\frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}{n(3+\frac{2}{n})}$$

$$=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{1}{3}.$$

19. *Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là $\frac{5}{3}$, tổng ba số hạng đầu tiên của nó là $\frac{39}{25}$. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số đó.*

Giải

Ta có $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{5}{3}$ (1)

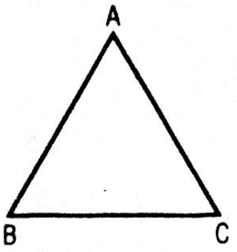
$$u_1+u_2+u_3=u_1(1+q+q^2)=\frac{39}{25}\quad(1)$$

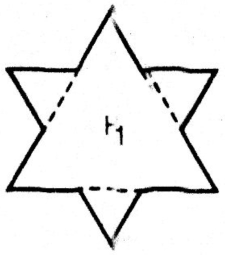
$$\Rightarrow\frac{u_1}{1-q}(1-q^3)=\frac{39}{25}\quad(2)$$

Thay (1) vào (2) ta được : $\frac{5}{3}(1-q^3)=\frac{39}{25}\Rightarrow q=\frac{2}{5}$

Từ (1) suy ra $u_1=1$. Vậy $u_1=1$, $q=\frac{2}{5}$

20. *Bông tuyết Vôn Kốc*



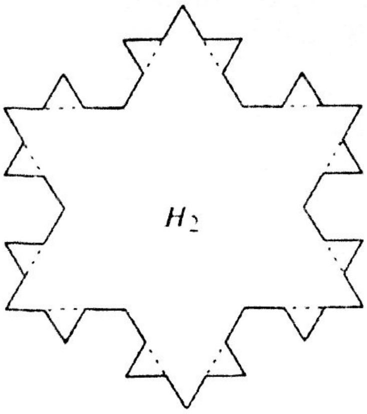


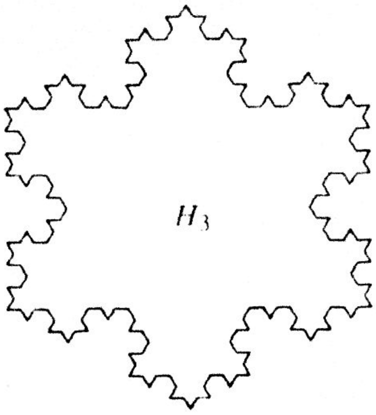
Ta bắt đầu từ một tam giác đều ABC, cạnh a. Chia mỗi cạnh của tam giác ABC làm ba đoạn thẳng bằng nhau. Trên mỗi đoạn thẳng ở giữa, dựng một tam giác đều nằm ngoài tam giác ABC rồi xóa đáy của nó, ta được đường gấp khúc khép kín H_1. Chia mỗi cạnh của H_1 rồi xóa đáy của nó, ta được đường gấp khúc khép kín H_2. Tiếp tục như vậy, ta được một hình giống như bông tuyết, gọi là bông tuyết Vôn Kốc (hình vẽ).

a) Gọi $p_1, p_2,..,p_n$ là độ dài của $H_1, H_2,..., H_n$,... Chứng minh rằng (p_n) là một cấp số nhân. Tìm $\lim p_n$.

b) Gọi S_n là diện tích của miền giới hạn bởi đường gấp khúc H_n. Tính S_n và tìm giới hạn của dãy số (S_n)

Hướng dẫn : *Số cạnh của H_n là 3.4^n. Tìm độ dài mỗi cạnh của H_n từ đó tính p_n. Để tính S_n cần chú ý rằng muốn có H_{n+1} chỉ cần thêm vào một tam giác đều nhỏ trên mỗi cạnh của H_n.*





Giải

a) Số cạnh của H_n là 3.4^n.

Độ dài mỗi cạnh của H_n là $\frac{a}{3^n}$.

Do đó độ dài của H_n là $p_n = 3.4^n.\frac{a}{3^n} = 3a\left(\frac{4}{3}\right)^n$

Vậy dãy số (p_n) là một cấp số nhân và $\lim p_n = +\infty$

b) Diện tích tam giác ABC cạnh a là $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$$S_1 - S = 3.\left(\frac{S}{9}\right) = \frac{S}{3},$$

$$S_2 - S_1 = 4.3\ .\left(\frac{S}{9^2}\right) = \frac{S}{3}.\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$S_3 - S_2 = 4^2.3\ .\left(\frac{S}{9^3}\right) = \frac{S}{3}.\left(\frac{4}{9}\right)^2$$

Bằng phương pháp qui nạp, ta được :

$$S_n - S_{n-1} = 4^{n-1}\ .\ 3.\left(\frac{S}{9^n}\right) = \frac{S}{3}\ .\ \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

Cộng từng vế n đẳng thức trên, ta được :

$$S_n - S = \frac{S}{3} + \frac{S}{3}.\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{S}{3}.\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \frac{S}{3}\ .\ \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \qquad (1)$$

Vế phải của (1) là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu là $\frac{S}{3}$ và công bội là $\frac{4}{9}$. Tổng của cấp số nhân này là :

$$\left(\frac{S}{3}\right).\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{3S}{5}$$

Do đó $\lim(S_n - S) = \frac{3S}{5}$

Suy ra $\lim S_n = \frac{3S}{5} + S = \frac{8S}{5} = \frac{8}{5}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{5}a^2$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Tính các giới hạn sau :*

a) $\lim\dfrac{3n^4+1}{(n+1)(n-2)(n^2+1)}$;   b) $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^3-1}\right)$;

c) $\lim\dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$.

Đáp số : a) – 3;   b) 0;   c) 7

2. *Tính các giới hạn :*

a) $\lim\dfrac{\sin n}{n}$;   b) $\lim\dfrac{2^n}{n!}$;   c) $\lim\sqrt[n]{n}$;

d) $\lim\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;   e) $\lim\left(\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}\ldots\dfrac{2n-1}{2n}\right)$

Hướng dẫn :

a) $-\dfrac{1}{n}\le\dfrac{\sin n}{n}\le\dfrac{1}{n}$, $\lim\dfrac{\sin n}{n}=0$

b) $0<\dfrac{2^n}{n!}=\dfrac{2.2\ldots2}{1.2\ldots n}<\dfrac{4}{n}\ (n>1)$

c) *Áp dụng bất đẳng thức Côsi :*

$$1<\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt{n}.\sqrt{n}.1\ldots}<\frac{2\sqrt{n}+(n-2).1}{n}=1-\frac{2}{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}$$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}<\dfrac{1}{n}\ (k=1,2,\ldots,n-1)$

$$\Rightarrow\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<1$$

e) $\left(\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}\ldots\dfrac{2n-1}{2n}\right)^2=\dfrac{1.2}{2^2}.\dfrac{3.5}{4^2}\ldots\dfrac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}.\dfrac{1}{2n+1}<\dfrac{1}{2n+1}$

$$\Rightarrow 0<\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

3. *Cho* $S=1+q+q^2+\ldots+\ |q|<1$

$T=1+Q+Q^2+\ldots\ |Q|<1$

$A=1+qQ+q^2Q^2+\ldots$

Tính A theo S và T

Đáp số : $A=\dfrac{ST}{S+T-1}$

B. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ - HÀM SỐ LIÊN TỤC

§4. ĐỊNH NGHĨA VÀ MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Giới hạn của hàm số tại một điểm :

Định nghĩa 1 :

Giả sử $(a; b)$ *là một khoảng chứa điểm* x_o *và f là một hàm số xác định trên tập hợp* $(a; b) \setminus \{x_o\}$*. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến* x_o *(hoặc tại điểm* x_o*) nếu với mọi dãy số* (x_n) *trong tập hợp* $(a; b) \setminus \{x_o\}$ *(tức là* $x_n \in (a; b)$ *và* $x_n \neq x_o$ *với mọi n) mà* $\lim x_n = x_o$*, ta đều có* $\lim f(x_n) = L$*.*

Khi đó ta viết :

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L \text{ hoặc } h(x) \to L \text{ khi } x \to x_o$$

Định nghĩa 2 :

- *Giả sử hàm số f xác định trên khoảng* $(a; +\infty)$*. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến* $+\infty$ *nếu với mọi dãy số* (x_n) *trong khoảng* $(a; +\infty)$ *(tức là* $x_n > a$ *với mọi n) mà* $\lim x_n = +\infty$*, ta đều có :*

$$\lim f(x_n) = L$$

Khi đó ta viết :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to +\infty$$

- *Các giới hạn :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ *và* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ *được định nghĩa tương tự.*

2. Một số định lý về giới hạn hữu hạn :

Định lí 1 :

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = L$ *và* $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = M$ $(L, M \in R)$*. Khi đó :*

a) $\lim\limits_{x \to x_o} [f(x) + g(x)] = L + M;$

b) $\lim\limits_{x \to x_o} [f(x) - g(x)] = L - M;$

c) $\lim\limits_{x \to x_o} [f(x).\, g(x)] = L\,.\, M$

Đặc biệt, nếu c là một hằng số thì $\lim\limits_{x \to x_o} [cf(x)] = cL;$

d) Nếu $M \neq 0$ *thì* $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$

Định lí 2 :

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = L$*, khi đó :*

a) $\lim\limits_{x \to x_o} |f(x)| = |L|;$

b) $\lim\limits_{x \to x_o} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}\ ;$

c) Nếu $f(x) \geq 0$ *với mọi* $x \in J \setminus \{x_o\}$*, trong đó J là một khoảng nào đó chứa* x_o *thì* $L \geq 0$ *và* $\lim\limits_{x \to x_o} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

21. *Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tìm các giới hạn sau :*

a) $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$; *b)* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{5 - x}}.$

Giải

a) Với $x \neq -1$ ta có $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} = \dfrac{(x+1)(x-4)}{x+1} = x - 4$

Với mọi dãy số (x_n) trong $R \setminus \{-1\}$ (tức $x_n \neq -1, \forall n$) mà $\lim x_n = -1$ ta có :

$\lim f(x_n) = \lim(x_n - 4) = -1 - 4 = -5$. Vậy $\lim \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} = -5$

b) Tập xác định của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5 - x}}$ là $D = (-\infty; 5)$

Với mọi dãy (x_n) trong $(-\infty; 5) \setminus \{1\}$ sao cho $\lim x_n = 1$, ta có :

$\lim f(x_n) = \lim \dfrac{1}{\sqrt{5 - x_n}} = \dfrac{1}{2}$. Vậy $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{5 - x}} = \dfrac{1}{2}$

22. *Cho hàm số* $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ *và hai dãy số* (x'_n), (x''_n) *với :*

$$x'_n = \frac{1}{2n\pi}; \qquad x''_n = \frac{1}{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}}$$

a) Tìm giới hạn của dãy số (x'_n), (x''_n), $(f(x'_n))$ *và* $(f(x''_n))$*;*

b) Tồn tại hay không $\lim\limits_{x \to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ *?*

Giải

a) Ta có $\lim x'_n = \lim\dfrac{1}{2n\pi} = 0;$

$$\lim x''_n = \lim\frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} = 0;$$

$$\lim f(x'_n) = \lim\cos 2n\pi = 1;$$

$$\lim f(x''_n) = \lim\cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0$$

b) Vì $\lim f(x'_n) \neq \lim f(x''_n)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$

23. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 + 7x + 11)$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x - x^3}{(2x-1)(x^4-3)}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} x\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{9x - x^2}$;

e) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} |x^2 - 4|$;

f) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^4+3x-1}{2x^2-1}}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 + 7x + 11) = \lim\limits_{x\to 2}3x^2 + \lim\limits_{x\to 2}7x + \lim\limits_{x\to 2}11$

$$= 3.2^2 + 7.2 + 11 = 37$$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x - x^3}{(2x-1)(x^4-3)} = \dfrac{0}{-2} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 0} x(1 - \dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to 0}(x-1) = -1$

d) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2} = \lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{-x(x-9)} = -\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{1}{x(\sqrt{x}+3)} = -\dfrac{1}{54}$

e) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} |x^2 - 4| = 1$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^4+3x-1}{2x^2-1}} = \sqrt{\dfrac{2^4+3.2-1}{22^2-1}} = \sqrt{3}$

24. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2 - x + 7}{2x^3-1}$;

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^4 + 7x^3 - 15}{x^4+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$.

Giải

a) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x+7}{2x^3-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}{x^3\left(2-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}}=\frac{0}{2}=0$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4+7x^3-15}{x^4+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4(2+\frac{7}{x}-\frac{15}{x^4})}{x^4(1+\frac{1}{x^4})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{7}{x}-\frac{15}{x^4}}{1+\frac{1}{x^4}}=2$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\sqrt{1+\frac{2}{x^6}}}{x^3(3-\frac{1}{x^3})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^6}}}{3-\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{3}$$

d) Với mọi x < 0, ta có :

$$\frac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^6}}}{3x^3-1}=\frac{-x^3\sqrt{1+\frac{2}{x^6}}}{3x^3-1}=\frac{-\sqrt{1+\frac{2}{x^6}}}{3-\frac{1}{x^3}}$$

Do đó : $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{2}{x^6}}}{3-\frac{1}{x^3}}=-\frac{1}{3}$$

25. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+2x}{8x^2-x+3}}$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2-x+2}$.

Giải

a) Ta có $$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2+2x}{8x^2-x+3}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{1+\frac{2}{x}}{8-\frac{1}{x}+\frac{8}{x^2}}}=\frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x^2-x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})}=0$$

vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Tính các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + x + 2}{x^2 - 3x + 2}$;　　b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt[3]{1 - x}}{2x}$;

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$;　　d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1 + x} - 1}{x}$

Hướng dẫn :

a) $x^3 - 4x^2 + x + 2 = (x - 1)(x^2 - 3x - 2)$.

Đáp số : 7

b) Đáp số : $\dfrac{1}{6}$

c) Đặt $t = \sqrt[12]{x}$.

Đáp số : $\dfrac{4}{3}$

d) Đặt $t = \sqrt[n]{1 + x}$ và áp dụng : $t^n - 1 = (t - 1)(t^{n-1} + t^{n-2} + \ldots + t + 1)$

Đáp số : $\dfrac{1}{n}$

2. *Tính các giới hạn :*

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$;　　b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - nx + n - 1}{x - 1}$

Đáp số :　a) $\dfrac{m}{n}$;　　b) $\dfrac{n(n-1)}{2}$

3. *Tính các giới hạn :*

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}}$;　　b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x})$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1})$

Đáp số :　a) $\dfrac{1}{2}$;　　b) $-\dfrac{5}{2}$;　　c) 0

§5. GIỚI HẠN MỘT BÊN

TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Giới hạn hữu hạn :

Định nghĩa 1 :

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0; b)$ $(x_0 \in R)$. *Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên phải là số thực L khi x dần đến* x_0 *(hoặc tại điểm* x_0*) nếu với mọi dãy số* (x_n) *trong khoảng* $(x_0; b)$ *mà* $\lim x_n = x_0$ *ta đều có* $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0^+$$

Định nghĩa 2 :

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a; x_0)$ $(x_0 \in R)$. *Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên trái là số thực L khi x dần đến* x_0 *(hoặc tại điểm* x_0*) nếu với mọi dãy số* (x_n) *trong khoảng* $(a; x_0)$ *mà* $\lim x_n = x_0$ *ta đều có* $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0^-$$

Nhận xét :

1) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ *thì hàm số f có giới hạn bên phải và giới hạn bên trái tại điểm* x_0 *và* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$

2) Ngược lại :

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ *thì hàm số f có giới hạn tại điểm* x_0 *và* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

2. Giới hạn vô cực :

1) Các định nghĩa $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ *được phát biểu tương tự định nghĩa 1 và định nghĩa 2.*

2) Nhận xét 1 và nhận xét 2 vẫn đúng đối với giới hạn vô cực.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

26. *Áp dụng định nghĩa giới hạn bên phải và giới hạn bên trái của hàm số, tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x - 1}$; *b)* $\lim\limits_{x \to 5^-} (\sqrt{5 - x} + 2x)$;

c) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x - 3}$; *d)* $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x - 3}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x - 1} = 0$; b) $\lim\limits_{x \to 5^-} (\sqrt{5 - x} + 2x) = 2.5 = 10$

c) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x - 3} = +\infty$ (vì $x > 3$) ; d) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x - 3} = -\infty$ (vì $x < 3$)

27. *Tìm các giới hạn sau (nếu có) :*

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$; *b)* $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$; *c)* $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$.

Giải

a) Với mọi $x > 2$, ta có $|x - 2| = x - 2$. Do đó :

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{|x - 2|}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} 1 = 1$$

b) Với mọi $x < 2$, ta có $|x - 2| = 2 - x$. Do đó :

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{|x - 2|}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{2 - x}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} -1 = -1.$$

c) Vì $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{|x - 2|}{x - 2} \neq \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$

28. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x + 2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$; *b)* $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4 - x^2}{\sqrt{2 - x}}$;

c) $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^5 + x^4}}$; *d)* $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}{\sqrt{9 - x^2}}$.

Giải

a) Với $x > 0$, ta có : $\dfrac{x + 2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = \dfrac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1}$

Do đó : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x + 2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} = \dfrac{2}{-1} = -2$

b) Với $x < 2$, ta có : $\dfrac{4 - x^2}{\sqrt{2 - x}} = \dfrac{(2 - x)(2 + x)}{\sqrt{2 - x}} = (x + 2)\sqrt{2 - x}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{2-x}} = \lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)\sqrt{2-x} = 0$

c) Với mọi $x > -1$

$$\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}} = \frac{(x+1)(x+2)}{x^3\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}(x+2)}{x^2}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}} = \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+1}(x+2)}{x^2} = 0$

d) Với $-3 < x < 3$

$$\frac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\sqrt{(3-x)(4-x)}}{\sqrt{(3-x)(3+x)}} = \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

29. *Cho hàm số :* $f(x) = \begin{cases} 2|x|-1 & \text{với } x \le -2 \\ \sqrt{2x^2+1} & \text{với } x > -2 \end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$ *và* $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ *(nếu có)*

Giải

Ta có : $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)^-}(2|x|-1) = 2|-2|-1 = 3$

$\lim\limits_{x\to(-2)^+} = \lim\limits_{x\to(-2)^+}\sqrt{2x^2+1} = 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -2} f(x) = 3.$

30. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}|x^2-8|$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x}$;

c) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-3}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{\dfrac{2x(x+1)}{x^2-6}}$;

e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{1-x^3}-3x}{2x^2+x-3}$;

f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2|x+1|-5\sqrt{x^2-3}}{2x+3}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}|x^2-8| = |(\sqrt{3})^2-8| = 5$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x} = \dfrac{2^2+2+1}{2^2+2.2} = \dfrac{7}{8}$;

c) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-3}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{\dfrac{2x(x+1)}{x^2-6}} = \sqrt[3]{\dfrac{24}{3}} = 2$;

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{1 - x^3} - 3x}{2x^2 + x - 3} = \dfrac{3 + 6}{8 - 5} = 3$

f) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2|x + 1| - 5\sqrt{x^2 - 3}}{2x + 3} = \dfrac{2 - 5}{-4 + 3} = 3$

31. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x \to -\sqrt{2}} \dfrac{x^3 + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2}$; b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^4 - 27x}{2x^2 - 3x - 9}$;

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^2 + 6x + 8}$; d) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\sqrt{1 - x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}}$.

Giải

a) Ta có $\lim\limits_{x \to -\sqrt{2}} \dfrac{x^3 + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2} = \lim\limits_{x \to -\sqrt{2}} \dfrac{x^3 + (\sqrt{2})^3}{x^2 - (\sqrt{2})^2}$

$= \lim\limits_{x \to -\sqrt{2}} \dfrac{(x + \sqrt{2})(x^2 - x\sqrt{2} + 2)}{(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})} = \lim\limits_{x \to -\sqrt{2}} \dfrac{x^2 - x\sqrt{2} + 2}{x - \sqrt{2}} = \dfrac{-3\sqrt{2}}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^4 - 27x}{2x^2 - 3x - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{(x - 3)(2x + 3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x(x^2 + 3x + 9)}{2x + 3} = 9$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^2 + 6x + 8} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{(x + 2)(x + 4)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x - 2)(x^2 + 4)}{x + 4} = -16$

d) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\sqrt{1 - x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\sqrt{1 - x} - (1 - x)}{|x|\sqrt{1 - x}} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x}}{|x|} = 1$

32. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2x^5 + x^3 - 1}{(2x^2 - 1)(x^3 + x)}}$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2|x| + 3}{\sqrt{x^2 + x + 5}}$;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + x} + 2x}{2x + 3}$; d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1)\sqrt{\dfrac{x}{2x^4 + x^2 + 1}}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2x^5 + x^3 - 1}{(2x^2 - 1)(x^3 + x)}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^5}}{(2 - \dfrac{1}{x^2})(1 + \dfrac{1}{x^2})}} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2|x| + 3}{\sqrt{x^2 + x + 5}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2|x| + 3}{|x|\sqrt{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x + 3}{-x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x^2}}} = 2$

c) $x^2 + x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ hoặc $x \geq 0$

Với mọi $x \leq -1,\ x \neq -\dfrac{3}{2}$

$$\frac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x+3} = \frac{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+2x}{2x+3} = \frac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+2x}{2x+3} = \frac{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+2}{2+\dfrac{3}{x}}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x+3} = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{x}{2x^4+x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x(x+1)^2}{2x^4+x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}} = 0$

33. *Cho hàm số :* $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+3 & \text{với } x \leq 2 \\ 4x-3 & \text{với } x > 2 \end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ *và* $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ *(nếu có).*

Giải

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+}(4x-3) = 5$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-}(x^2-2x+3) = 3$

Vì $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to2} f(x)$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Cho hàm số* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x} & \text{nếu } x > 1 \\ 5x+3 & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ *và* $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ *(nếu có)*

2. *Cho* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{nếu } x > 1 \\ ax+2 & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$

Xác định a để tồn tại $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ *ĐS : a = 1*

3. *Cho* $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x < 3 \\ ax+b & \text{nếu } 3 \leq x \leq 5 \\ 3 & \text{nếu } x > 5 \end{cases}$

Tìm a, b để tồn tại $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ *và* $\lim\limits_{x\to5} f(x)$ *ĐS : a = 1 ; b = 2*

§6. MỘT VÀI QUI TẮC TÌM GIỚI HẠN VÔ CỰC

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

Định lí :

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$ *thì* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

Qui tắc 1 :

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L \neq 0$ *thì* $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)g(x)]$ *được cho trong bảng sau :*

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	*Dấu của L*	$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)g(x)]$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Qui tắc 2 :

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} = L \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ *và* $g(x) > 0$ *hoặc* $g(x) < 0$ *với mọi* $x \in J \setminus \{x_0\}$; *J là khoảng chứa* x_0 *thì* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *được cho trong bảng sau :*

Dấu của L	*Dấu của g(x)*	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

34. *Tìn các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 - 5x^2 + 7)$;　　b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^4 - 3x + 12}$

Giải

a) Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 - 5x^2 + 7) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3\left(3 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{7}{x^3}\right) = -\infty$

vì $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}(3 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^3}) = 3 > 0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^4 - 3x + 12} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sqrt{2 - \frac{3}{x^3} + \frac{12}{x^4}} = +\infty$

vì $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2 - \frac{3}{x^3} + \frac{12}{x^4}} = \sqrt{2} > 0$

35. *Tìm giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{2x+1}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x+1}{x-2}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4}\right)$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{2x+1}{x-2} = +\infty$

vì $\lim\limits_{x\to2^+}(2x+1) = 5$, $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2) = 0$ và $x - 2 > 0, \forall x > 2$.

b) $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x+1}{x-2} = -\infty$

vì $\lim\limits_{x\to2^-}(2x+1) = 5$, $\lim\limits_{x\to2^-}(x-2) = 0$ và $x - 2 < 0, \forall x < 2$

c) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to0}\frac{x-1}{x^2} = -\infty$

vì $\lim\limits_{x\to0}(x-1) = -1 < 0$ và $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0$, $x^2 > 0\ \forall x \neq 0$.

d) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4}\right) = \lim\limits_{x\to2}\frac{x+2-1}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to2}\frac{x+1}{x^2-4} = -\infty$

vì $\lim\limits_{x\to2}(x+1) = 3$, $\lim\limits_{x\to2}(x^2-4) = 0$ và $x^2 - 4 < 0$ với $-2 < x < 2$.

36. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-5}{x^2+1}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-5}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\frac{x^2(1-\frac{5}{x^3})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\,.\frac{1-\frac{5}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} = +\infty$

vì $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{5}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1 > 0.$

b) Với mọi x < 0, ta có $\dfrac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = \dfrac{x^2\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^3}}}{1 - 2x} = \dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^3}}}{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}}$

vì $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^3}} = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}\right) = 0$ và $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} > 0$ với mọi $x < 0$

nên $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = +\infty$

37. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{2x+1}{2x-3}\right]$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5}{(x-1)(x^2 - 3x + 2)}$.

Giải

a) Ta có $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2}{(x-1)^2} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x+1}{2x-3} = \dfrac{3}{-1} = -3 < 0$

Do đó $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{2x+1}{2x-3}\right] = -\infty$

b) $\dfrac{5}{(x-1)(x^2 - 3x + 2)} = \dfrac{1}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{5}{x-2}$

vì $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5}{x-2} = -5 < 0$

nên $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5}{(x-1)(x^2 - 3x + 2)} = -\infty$

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^3 + 4x^2 - 2x + 1)$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{2x^4 - 2x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{5x - 1}{1 - x}$; d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x - 1}{1 - x}$

ĐS : a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$; d) $+\infty$

2. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x - 2}{(x+1)^2(x-2)}$; b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5}{(x+1)(x^2 - 2x + 3)}$

ĐS : a) $+\infty$; b) $-\infty$

§7. CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

Khi giải các bài toán về giới hạn, ta có thể gặp một số trường hợp sau đây :

1. Tìm $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$*, trong đó* $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$

hoặc $\lim f(x) = \pm\infty$, $\lim g(x) = \pm\infty$

2. Tìm $\lim[f(x)g(x)]$*, trong đó* $\lim f(x) = 0$, $\lim g(x) = \pm\infty$

3. Tìm $\lim[f(x) - g(x)]$*, trong đó* $\lim f(x) = \lim g(x) = +\infty$

hoặc $\lim f(x) = \lim g(x) = -\infty$

(Khi $x \to x_0$ *hoặc* $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$*).*

Tương ứng ta có các dạng vô định sau :

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad 0.\infty;\qquad \infty - \infty$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

38. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$;

b) $\lim\limits_{x\to(-3)^+} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{(x+3)^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to(-3)^-} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{(x+3)^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x^2 + x}$

Giải

a) Dạng $\dfrac{0}{0}$ ta phân tích tử và mẫu ra thừa số :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = 3$$

b) $$\lim_{x\to(-3)^+} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x+3)^2} = \lim_{x\to(-3)^+} \frac{(x+3)(2x-1)}{(x+3)^2} = \lim_{x\to 3^+} \frac{2x - 1}{x + 3} = -\infty$$

c) $$\lim_{x\to(-3)^-} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x+3)^2} = \lim_{x\to(-3)} \frac{(x+3)(2x-1)}{(x+3)^2} = \lim_{x\to(-3)^-} \frac{2x - 1}{x + 3} = +\infty$$

vì $\lim\limits_{x \to (-3)^-} (2x - 1) = -7 < 0$ và $\lim\limits_{x \to (-3)^-} (x + 3) = 0$; $x + 3 < 0$

d) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x^2 + x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x(x + 1)(\sqrt{x^3 + 1} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{(x + 1)(\sqrt{x^3 + 1} + 1)} = 0$$

39. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + x - 10}{9 - 3x^3}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 - 7x + 12}}{3|x| - 17}$.

Giải

a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + x - 10}{9 - 3x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{10}{x^3}}{\frac{9}{x^3} - 3} = 0$$

b) Với mọi $x \neq 0$, ta có :

$$\frac{\sqrt{2x^2 - 7x + 12}}{3|x| - 17} = \frac{|x|\sqrt{2 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}}}{|x|\left(3 - \frac{17}{|x|}\right)} = \frac{\sqrt{2 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}}}{3 - \frac{17}{|x|}}$$

Do đó $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 - 7x + 12}}{3|x| - 17} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

40. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x \to (-1)^+} (x^3 + 1)\sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 1}}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 2)\sqrt{\dfrac{x - 1}{x^3 + x}}$.

Giải

a) Dạng $0.\infty$

Với $x > -1$ đủ gần -1 $(-1 < x < 0)$ ta có :

$$(x^3 + 1)\sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} = (x^2 - x + 2)(x + 1).\sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} = (x^2 - x + 1)\sqrt{\frac{x(x + 1)}{x - 1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to (-1)^+} (x^3 + 1)\sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} = \lim_{x \to (-1)^+} (x^2 - x + 1)\sqrt{\frac{x(x + 1)}{x - 1}} = 0$$

b) Dạng $0.\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} (x + 2)\sqrt{\frac{x - 1}{x^3 + x}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{(x + 2)^2(x - 1)}{x^3 + x}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1$$

41. *Tìm các giới hạn sau :*

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)\ ; \qquad b)\ \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-x^2}-1}{x^2-x}$$

Giải

a) Dạng $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}+x} = 0$$

b) Dạng $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-x^2}-1}{x^2-x} = \lim_{x\to1}\frac{2x-x^2-1}{x(x-1)(\sqrt{2x-x^2}+1}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{-(x-1)^2}{x(x-1)(\sqrt{2x-x^2}+1} = \lim_{x\to1}\frac{1-x}{x(\sqrt{2x-x^2}+1)} = 0$$

42. *Tìm các giới hạn sau :*

$$a)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right); \qquad b)\ \lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x+2}\ ; \qquad c)\ \lim_{x\to9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}\ ;$$

$$d)\ \lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}\ ; \qquad e)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-x^3+11}{2x-7}\ ; \qquad f)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4+4}}{x+4}.$$

Giải

$$a)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to0}\frac{x+1}{x^2} = +\infty$$

vì $\lim\limits_{x\to0}(x+1) = 1 > 0$, $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0$ và $x^2 > 0, \forall x \neq 0$

$$b)\ \lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x+2} = \lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} = \lim_{x\to-2}(x^2-2x+4) = 12$$

$$c)\ \lim_{x\to9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x} = \lim_{x\to9}\frac{1}{3+\sqrt{x}} = \frac{1}{6}$$

$$d)\ \lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x} = \lim_{x\to0}\frac{4-(4-x)}{x(2+\sqrt{4-x})} = \lim_{x\to0}\frac{1}{2+\sqrt{4-x}} = \frac{1}{4}$$

$$e)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2+\dfrac{11}{x}}{2-\dfrac{7}{x}} = +\infty$$

f) Với $x < 0$, ta có : $\dfrac{\sqrt{x^4+4}}{x+4} = \dfrac{x^2\sqrt{1+\dfrac{4}{x^4}}}{x+4} = \dfrac{x\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}}{1+\dfrac{4}{x}}$

vì $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt{1+\dfrac{4}{x^4}} = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right) = 1$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+4}}{x+4} = -\infty$

43. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}} \dfrac{x^3+3\sqrt{3}}{3-x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-4x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{3x}$

Giải

a) Ta có : $\dfrac{x^3+3\sqrt{3}}{3-x^2} = \dfrac{(x+\sqrt{3})(x^2-x\sqrt{3}+3)}{(x+\sqrt{3})(\sqrt{3}-x)} = \dfrac{x^2-x\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-x}$

với $x \neq -\sqrt{3}$.

Do đó : $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}} \dfrac{x^3+3\sqrt{3}}{3-x^2} = \dfrac{9}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-4x} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x(x-4)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{x(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{1}{16}$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x+1-1}{3x(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} = \dfrac{1}{6}$

44. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt{\dfrac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|+\sqrt{x^2+x}}{x+10}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2x^4+x^2-1}{1-2x}}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{2x^2+1}+x)$.

Giải

a) Với $x < 0$, ta có :

$$x\sqrt{\frac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}} = -|x|\sqrt{\frac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}} = -\sqrt{\frac{x^2(2x^3+x)}{x^5-x^2+3}} = -\sqrt{\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}}}$$

Do đó : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt{\dfrac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}} = -\sqrt{2}$.

b) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{|x|+\sqrt{x^2+x}}{x+10} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x+10}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x+10} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1+\frac{10}{x}} = -2.$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+x^2-1}}{1-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}}{x(\dfrac{1}{x}-2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\,.\dfrac{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}}{\dfrac{1}{x}-2}=-\infty$

vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}}{\dfrac{1}{x}-2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+1}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+x-x^2}{\sqrt{2x^2+x}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x(x+1)}{-x\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{x+1}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x}+1}}=+\infty$ vì $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-1)+\infty$

45. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}$;　　b) $\lim\limits_{x\to1}x\dfrac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}+1-x}$;

c) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$;　　d) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x^3-8}}{x^2-2x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x^2(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x})}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to1^-}x\dfrac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}+1-x}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{2+\sqrt{1-x}}=\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{(\sqrt{3-x})^2}{\sqrt{(3-x)(x^2+3x+9)}}=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x^2+3x+9}}=0$

d) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x^3-8}}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{(x-2)(x^2+2x+4)}}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x^2+2x+4}{x-2}}=+\infty$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2-3x}$;　　b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{2}}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$;　　d) $\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{x-4}{\sqrt{x^3-64}}$.

ĐS : a) $+\infty$;　b) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;　c) $-\dfrac{1}{2}$;　d) 0.

§8. HÀM SỐ LIÊN TỤC

TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Hàm số liên tục tại một điểm :

Định nghĩa :

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng (a; b) và $x_o \in (a; b)$. Hàm số f được gọi là liên tục tại điểm x_o nếu :

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

Hàm số không liên tục tại điểm x_o được gọi là gián đoạn tại điểm x_o.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn :

Định nghĩa :

a) Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp J, trong đó J là một khoảng hoặc hợp của nhiều khoảng. Ta nói hàm số f liên tục trên J nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc tập hợp đó.

b) Hàm số f xác định trên đoạn [a; b] được gọi là liên tục trên đoạn [a; b] nếu nó liên tục trên khoảng (a; b) và :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x \to b} f(x) = f(b)$$

Định lí 1 :

Các hàm số lượng giác y = sinx, y = cosx, y = tanx, y = cotx liên tục trên tập xác định của chúng.

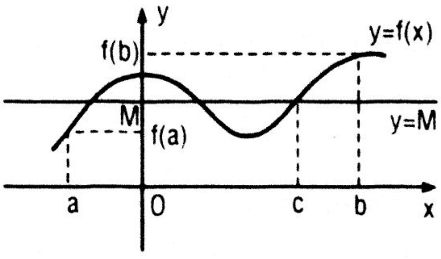
3. Tính chất của hàm số liên tục :

Định lý 2 : *(Định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục)*

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn [a; b]. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa f(a) và f(b) tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho f(c) = M.

Ý nghĩa hình học của định lý :

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn [a; b] và M là một số thực nằm giữa f(a) và f(b) thì đường thẳng y = M cắt đồ thị của hàm số y = f(x) ít nhất tại một điểm có hoành độ $c \in (a; b)$.

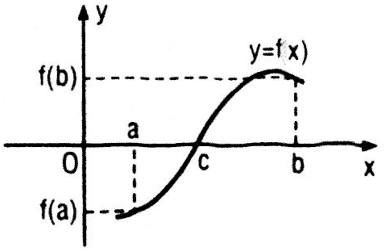


*** Hệ quả :**

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn [a; b] và f(a) f(b) < 0 thì tồn tại ít nhất một điểm c ∈ (a; b) sao cho f(c) = 0.

Ý nghĩa hình học của hệ quả :

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn [a; b] và f(a)f(b) < 0 thì đồ thị của hàm số y = f(x) cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ c ∈ (a; b).



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

a) Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm :

– Tính $f(x_0)$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ thì f liên tục tại x_0.

– Nếu hàm số có giá trị tuyệt đối hoặc là hàm số "lắp ghép" ta sử dụng liên tục một bên.

- Tính $f(x_0)$ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

  Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ thì f liên tục tại x_0

b) Tìm các điểm gián đoạn của hàm số :

Ta tìm x_0 sao cho :

- f không xác định tại x_0 hoặc
- f xác định tại x_0 nhưng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại
- f xác định tại x_0 tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0)$ nhưng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

45. *Chứng minh rằng :*

a) Các hàm số $f(x) = x^3 - x + 3$ *và* $g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ *liên tục tại mọi điểm* $x \in R$.

b) Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{với } x \neq 2, \\ 1 & \text{với } x = 2 \end{cases}$ *liên tục tại điểm* $x = 2$.

c) Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{với } x \neq 1, \\ 2 & \text{với } x = 1 \end{cases}$ *gián đoạn tại điểm* $x = 1$.

Giải

a) Hàm số $f(x) = x^3 - x + 3$ xác định trên R. Với mọi $x_o \in R$, ta có :

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_0} (x^3 - x + 3) = x_0^3 - x_o + 3 = f(x_o).$$

Vậy f liên tục tại điểm x_o. Do đó hàm số f liên tục tại mọi điểm của R. Chứng minh tương tự, hàm số g liên tục tại mọi điểm của R.

b) Với mọi $x \neq 2$, ta có :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = x - 1$$

Do đó $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x - 1) = 1 = f(2)$

Vậy hàm số f liên tục tại điểm x = 2

c) Với mọi $x \neq 1$, ta có :

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1} = x^2 + x + 1.$$

Do đó $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x^2 + x + 1) = 3 \neq 2 = f(1)$.

Vậy hàm số f gián đoạn tại điểm x = 1.

47. *Chứng minh rằng :*

a) Hàm số $f(x) = x^4 - x^2 + 2$ liên tục trên R;

b) Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ liên tục trên khoảng (–1; 1);

c) Hàm số $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ liên tục trên đoạn [–2; 2];

d) Hàm số $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ liên tục trên nửa khoảng $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$

Giải

a) Hàm số $f(x) = x^4 - x^2 + 2$ xác định trên R. Với mọi $x_o \in R$ ta có :

$$\lim_{x \to x_o} = \lim_{x \to x_o} (x^4 - x^2 + 2) = x_0^4 - x_0^2 + 2 = f(x_o)$$

Vậy f liên tục tại x_o nên f liên tục trên R.

b) Hàm số f xác định khi và chỉ khi :

$1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

Vậy hàm số f xác định trên khoảng (–1 ; 1)

Với mọi $x_o \in (-1; 1)$, ta có : $\lim_{x \to x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o} \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}} = f(x_o)$

Vậy hàm số f liên tục tại điểm x_o. Do đó f liên tục trên khoảng (–1; 1)

c) Hàm số $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ xác định trên đoạn [–2 ; 2]

Với mọi $x_o \in (-2; 2)$, ta có : $\lim_{x \to x_o} f(x) = \sqrt{8 - 2x_0^2} = f(x_o)$

Vậy hàm số f liên tục trên khoảng (–2; 2). Ngoài ra, ta có :

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = \sqrt{8-2(-2)^2} = 0 = f(-2), \text{ và } \lim_{x\to(-2)^-} f(x) = \sqrt{8-2.2^2} = 0 = f(2)$$

Do đó hàm số f liên tục trên đoạn $[-2; 2]$

d) Hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$ xác định trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$

Với $x_o \in \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ ta có $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o} \sqrt{2x-1} = \sqrt{2x_o - 1} = f(x_o)$

nên hàm số liên tục trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} \sqrt{2x-1} = 0 = f(\frac{1}{2})$

Do đó hàm số f liên tục trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$

48. *Chứng minh rằng mỗi hàm số sau đây liên tục trên tập xác định của nó :*

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{2x + 1}$; *b)* $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{2-x}$

Giải

a) Tập xác định của hàm số f là $R \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Hàm phân thức hữu tỉ f liên tục trên tập xác định của nó, tức là liên tục trên các khoảng $(-\infty; -\frac{1}{2})$ và $(-\frac{1}{2}; +\infty)$

b) Hàm số f xác định khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1$$

Do đó tập xác định của hàm số f là $(-\infty; 1]$

Với mọi $x_o \in (-\infty; 1)$, ta có :

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o} (\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x}) = \sqrt{1-x_o} + \sqrt{2-x_o} = f(x_o)$$

Vậy hàm số f liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$. Ngoài ra

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x}) = 1 = f(1)$$

Do đó hàm số f liên tục trên $(-\infty; 1]$

49. *Chứng minh rằng phương trình :* $x^2\cos x + x\sin x + 1 = 0$ *có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng* $(0; \pi)$

Giải

Hàm số $f(x) = x^2\cos x + x\sin x + 1$ liên tục trên đoạn $[0; \pi]$, $f(0) = 1 > 0$, $f(\pi) = 1 - \pi^2 < 0$. Vì $f(0).f(1) < 0$ nên theo hệ quả của định lí về giá trị trung giản của hàm số liên tục, tồn tại ít nhất một số thực $c \in (0; \pi)$ sao cho $f(c) = 0$. Số thực c là một nghiệm của phương trình đã cho.

50. *Chứng minh rằng :*

a) Hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 \text{ với } x \le 0, \\ x^2 + 2 \text{ với } x > 0 \end{cases}$ *gián đoạn tại điểm* $x = 0$.

b) Mỗi hàm số $g(x) = \sqrt{x-3}$ *và* $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} \text{ với } x \le 1 \\ -\dfrac{1}{x} \text{ với } x > 1 \end{cases}$

liên tục trên tập xác định của nó.

Giải

a) Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 2) = 2$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x+1)^2 = 1$

Suy ra hàm số f gián đoạn tại $x = 0$

b) Tập xác định của hàm số $g(x) = \sqrt{x-3}$ là $[3; +\infty)$.

Với $x_0 > 3$ ta có $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x-3} = \sqrt{x_0 - 3} = g(x_0)$

nên g liên tục $(3; +\infty)$, ngoài ra :

$\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = 0 = g(3)$

Vậy g liên tục trên $[3; +\infty)$

* Tập xác định của hàm số $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} \text{ với } x \le 1 \\ -\dfrac{1}{x} \text{ với } x > 1 \end{cases}$ là R

Rõ ràng h liên tục trên $(-\infty; 1)$ và trên $(1; +\infty)$ tại $x_0 = 1$ ta có :

$\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-2} = -1$; $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{-1}{x} = -1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = h(1) \Rightarrow$ h liên tục tại $x = 1$

Vậy h liên tục trên R.

51. *Giải thích vì sao :*

a) Hàm số $f(x) = x^2\sin x - 2\cos^2 x + 3$ *liên tục trên R;*

b) Hàm số $g(x) = \dfrac{x^3 + x\cos x + \sin x}{2\sin x + 3}$ *liên tục trên R;*

c) Hàm số $h(x) = \dfrac{(2x+1)\sin x - \cos^3 x}{x\sin x}$ *liên tục tại mọi điểm* $x \ne k\pi$, $k \in Z$.

Giải

a) Với mọi $x_0 \in R$, ta có :

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2,\ \lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 \text{ và } \lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$$

(vì các hàm số y = sinx và y = cosx liên tục trên R)

Do đó :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (x^2\sin x - 2\cos^2 x + 3) = x_0^2\sin x_0 - 2\cos^2 x_0 + 3 = f(x_0)$$

Vậy hàm số f liên tục tại mọi điểm $x_0 \in R$. Do đó hàm số f liên tục trên R.

b) Tập xác định của g là R

Với mọi $x_0 \in R$ ta có : $\lim_{x \to x_0} x^3 = x_0^3,\ \lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0,\ \lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$

Do đó $\lim g(x) = \dfrac{x_0^3 + x_0\cos x_0 + \sin x_0}{2\sin x_0 + 3} = g(x_0)$

Vậy hàm số g liên tục tại mọi $x_0 \in R$. Do đó g liên tục trên R.

c) Tương tự b/ $\forall x_0 \neq k\pi,\ k \in Z$

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \frac{(2x_0 + 1)\sin x_0 - \cos^3 x_0}{x_0 \sin x_0} = h(x_0)$$

Vậy hàm số h liên tục tại mọi $x_0 \in R$. Do đó h liên tục trên R.

52. *Chứng minh rằng hàm số* $f(x) = x^2 + x + 3 + \dfrac{1}{x - 2}$ *liên tục trên tập xác định của nó.*

Giải

Tập xác định D = R \ {2}

Với mọi $x_0 \neq 2$, ta có :

$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0^2 + x_0 + 3 + \dfrac{1}{x_0 - 2} = f(x_0)$, suy ra f liên tục tại mọi $x_0 \neq 2$ nên f liên tục trên tập xác định.

53. *Chứng minh rằng phương trình* $x^3 + x + 1 = 0$ *có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn* -1.

Giải

Hàm số $f(x) = x^3 + x + 1$ liên tục trên đoạn $[-1; 0]$ có $f(-1) = -1$ và $f(0) = 1$. Vì $f(-1)f(0) < 0$ nên theo hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (-1; 0)$ sao cho $f(c) = 0$. Số c là nghiệm âm lớn hơn -1 của phương trình đã cho.

54. *Cho hàm số :* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{với } x \neq 0 \\ -1 & \text{với } x = 0 \end{cases}$

a) Chứng tỏ rằng $f(-1)f(2) < 0$.

b) Chứng tỏ rằng phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 2)$

c) Điều khẳng định trong b) có mâu thuẫn với định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục hay không ?

Giải

a) Ta có $f(-1) = -1$; $f(2) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(-1) \cdot f(2) < 0$

b) Vì $f(0) \neq 0$ với mọi $x \in R$ nên phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm.

c) Điều khẳng định trong b) không mâu thuẫn với định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục vì hàm số f gián đoạn tại điểm $x = 0 \in [-1; 2]$

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *a) Vẽ đồ thị hàm số* $y = \frac{|x|}{x}$; *b) f có liên tục tại $x = 0$ không ?*

2. *Xét tính liên tục của hàm số* $y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{nếu } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{nếu } 1 < x \le 2 \end{cases}$

Hướng dẫn : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 \Rightarrow$ *f gián đoạn tại* $x = 1$

3. *Tìm các điểm gián đoạn của các hàm số :*

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{nếu } x \neq 0 \\ -2 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$; *b)* $f(x) = \frac{x}{\cos x}$.

4. *Định a, b để hàm số sau liên tục trên R*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x < 3 \\ ax + b & \text{nếu } 3 \le x \le 5 \\ 3 & \text{nếu } x > 5 \end{cases}$$

Hướng dẫn :

- *Tại* $x_o = 3$: $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = f(3) \Leftrightarrow 3a + b = 1$ (1)
- *Tại* $x_o = 5$: $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = f(5) \Leftrightarrow 5a + b = 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $a = 1; b = -2$

5. *Chứng minh rằng phương trình* $2x^3 - 6x + 1 = 0$ *có 3 nghiệm trên khoảng* $(-2; 2)$

Hướng dẫn : $f(-2) \cdot f(-1) < 0$; $f(-1) \cdot f(1) < 0$, $f(1) \cdot f(2) < 0$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

A. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

55. *Tìm giới hạn của các dãy số* (u_n) *với :*

a) $u_n = \dfrac{2n^3 - n - 3}{5n - 1}$; b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^4 - 2n + 3}}{-2n^2 + 3}$;

c) $u_n = -2n^2 + 3n - 7$; d) $u_n = \sqrt[3]{n^9 + 8n^2 - 7}$.

Giải

a) Ta có $\lim\dfrac{2n^3 - n - 3}{5n - 1} = \lim\dfrac{n^3\left(2 - \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(\dfrac{5}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}\right)} = \lim\dfrac{2 - \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{3}{n^3}}{\dfrac{5}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}} = +\infty$

vì $\lim(2 - \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{3}{n^3}) = 2$ và $\lim(\dfrac{5}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}) = 0$; $5n - 1 > 0$

b) $\lim\dfrac{\sqrt{n^4 - 2n + 3}}{-2n^2 + 3} = \lim\dfrac{n^2\sqrt{1 - \dfrac{2}{n^3} + \dfrac{3}{n^4}}}{n^2(-2 + \dfrac{3}{n^2})} = \lim\dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{2}{n^3} + \dfrac{3}{n^4}}}{-2 + \dfrac{3}{n^2}} = -\dfrac{1}{2}$

c) $\lim(-2n^2 + 3n - 7) = \lim n^2(-2 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{7}{n^2}) = -\infty$

vì $\lim n^2 = +\infty$ và $\lim(-2 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{7}{n^2}) = -2 < 0$

d) $\lim\sqrt[3]{n^9 + 8n^2 - 7} = \lim n^3\sqrt{1 + \dfrac{8}{n^7} - \dfrac{7}{n^9}} = +\infty$

vì $\lim n^3 = +\infty$ và $\lim\sqrt[3]{1 + \dfrac{8}{n^7} - \dfrac{7}{n^9}} = 1 > 0$

56. *Tìm giới hạn của các dãy số* (u_n) *với :*

a) $u_n = \sqrt{3n - 1} - \sqrt{2n - 1}$; b) $u_n = \dfrac{4^n - 5^n}{2^n + 3.5^n}$.

Giải

a) $\lim u_n = \lim(\sqrt{3n - 1} - \sqrt{2n - 1}) = \lim\dfrac{3n - 1 - (2n - 1)}{\sqrt{3n - 1} + \sqrt{2n - 1}}$

$= \lim\dfrac{n}{\sqrt{n}\left(\sqrt{3 - \dfrac{1}{n}} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{n}}\right)} = \lim\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{3 - \dfrac{1}{n}} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{n}}} = +\infty$

vì $\lim\sqrt{n} = +\infty$ và $\lim\left(\sqrt{3-\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}\right) = \sqrt{3}+\sqrt{2} > 0$

b) Chia tử và mẫu của u_n cho 5^n ta được :

$$\lim u_n = \lim\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 3} = -\frac{1}{3} \text{ vì } \lim\left(\frac{4}{5}\right)^n = \lim\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$$

57. *Cho một cấp số nhân (u_n) trong đó $243u_8 = 32u_3$ với $u_3 \neq 0$.*

a) Tính công bội của cấp số nhân đã cho.

b) Biết rằng tổng của cấp số nhân đã cho bằng 3^5, tính u_1.

Giải

a) Ta có $u_8 = u_3q^5$ là công bội của cấp số nhân.

Thay vào đẳng thức đã cho, ta được :

$$243u_3q^5 = 32u_3$$

vì $u_3 \neq 0$ nên : $q^5 = \frac{32}{243} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \Leftrightarrow q = \frac{2}{3}$

b) Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đó là $S = \frac{u_1}{1-q}$. Từ đó, ta có :

$$3^5 = \frac{u_1}{1-\frac{2}{3}}, \text{ do đó } u_1 = 3^4 = 81$$

58. *Tìm giới hạn của dãy số (u_n) xác định bởi :*

$$u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Hướng dẫn : Với mỗi số nguyên dương k, ta có :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Giải

$$u_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}$$

Do đó $\lim u_n = \lim(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$

B. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ - HÀM SỐ LIÊN TỤC

59. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{2x^4+3x+1}{x^2-x+2}}$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+5}}{2x-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{x^4+1}{x^2+4x+3}$; d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{(x-2)^2}\sqrt{\dfrac{x+4}{4-x}}$;

e) $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{\sqrt{8+2x}-2}{\sqrt{x+2}}$; f) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4+x^2})$.

Giải

a) $$\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{\frac{2x^4+3x+1}{x^2-x+2}}=\sqrt[3]{\frac{32-6+1}{4+2+2}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2}$$

b) $$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+5}}{2x+1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x(2+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}}=-\frac{1}{2}$$

c) Với mọi x < – 3, ta có : $\dfrac{x^4+1}{x^2+4x+3}=\dfrac{x^4+1}{x+1}.\dfrac{1}{x+3}$

vì $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{x^4+1}{x+1}=\dfrac{82}{-2}=-41<0$ và $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{1}{x+3}=-\infty$

nên $\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{x^4+1}{x^2+4x+3}=+\infty$

d) Vì $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{(x-2)^2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x+4}{4-x}}=\sqrt{\dfrac{6}{2}}=\sqrt{3}>0$,

nên $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{(x-2)^2}\sqrt{\dfrac{x+4}{4-x}}=+\infty$

e) Nhân tử và mẫu của phân thức với $\sqrt{8+2x}+2$, ta được :

$$\frac{\sqrt{8+2x}-2}{\sqrt{x+2}}=\frac{8+2x-4}{\sqrt{x+2}(\sqrt{8+2x}+2)}=\frac{2(x+2)}{\sqrt{x+2}(\sqrt{8+2x}+2)}$$

$=\dfrac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{8+2x}+2}$ với mọi x > – 2

Do đó $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{\sqrt{8+2x}-2}{\sqrt{x+2}}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{8+2x}+2}=\dfrac{0}{4}=0$

f) $$\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4+x^2})=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+x-4-x^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{4+x^2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x-4}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+|x|\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x(1-\frac{4}{x})}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}\right)}$$

$$= -\lim_{x \to -\infty} \frac{1-\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = -\frac{1}{2}$$

60. *Hàm số* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+8}{4x+8} & \text{với } x \neq -2 \\ 3 & \text{với } x = -2 \end{cases}$ *có liên tục không ?*

Giải

Hàm số f liên tục tại mọi điểm $x \neq -2$. Với $x \neq -2$, ta có :

$$f(x) = \frac{x^3+8}{4(x+2)} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{4(x+2)} = \frac{x^2-2x+4}{4}$$

Do đó $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-2x+4}{4} = 3 = f(-2)$

Vậy hàm số f liên tục tại $x = -2$, do đó f liên tục trên R.

61. *Tìm các giá trị của m để hàm số :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x} & \text{với } x < 2 \\ mx+m+1 & \text{với } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{liên tục trên R.}$$

Giải

Ta có $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (mx+m+1) = 3m+1 = f(2)$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x-1}{x} = \frac{1}{2}$$

f liên tục tại mọi $x \neq 2$. Do đó :

f liên tục trên R $\Leftrightarrow$ f liên tục tại $x = 2$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 3m+1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}$$

62. *Chứng minh rằng phương trình :* $x^4 - 3x^2 + 5x - 6 = 0$ *có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (1; 2).*

Giải

Hàm số $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 6$ liên tục trên đoạn [1; 2]. Ta có $f(1) = -3 < 0$ và $f(2) = 8 > 0$.

Từ đó $f(1).f(2) < 0$ nên theo hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại ít nhất một số thực $c \in (1; 2)$ sao cho $f(c) = 0$. Số thực c là một nghiệm của phương trình đã cho.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong bốn kết quả của mỗi câu sau đây, chỉ có một kết quả đúng. Hãy chọn kết quả đúng đó.

63. a) $\lim\dfrac{n-2\sqrt{n}\sin 2n}{2n}$ là : (A) 1; (B) $\dfrac{1}{2}$; (C) − 1; (D) 0.

b) $\lim\dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}$ là : (A) $\dfrac{1}{2}$; (B) $\dfrac{1}{5}$; (C) $-\dfrac{3}{2}$; (D) 0.

c) $\lim\dfrac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}$ là : (A) $-\dfrac{1}{2}$; (B) $\dfrac{3}{2}$; (C) $\dfrac{1}{2}$; (D) − 1.

d) $\lim(2n-3n^3)$ là : (A) $+\infty$; (B) $-\infty$; (C) 2 ; (D) − 3.

Trả lời

a) $\lim\dfrac{n-2\sqrt{n}\sin 2n}{2n}=\lim\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sin 2n}{\sqrt{n}}\right)=\dfrac{1}{2}$

vì $\left|\dfrac{\sin 2n}{\sqrt{n}}\right|\le\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$. Chọn (B).

b) $\lim\dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n}-3}{2+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}}=-\dfrac{3}{2}$. Chọn (C).

c) $\lim\dfrac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}=\lim\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}=-\dfrac{1}{2}$. Chọn (A).

d) $\lim(2n-3n^3)=\lim n^3(\dfrac{2}{n^3}-3)=-\infty$. Chọn (B).

64. a) $\lim\dfrac{n^3-2n}{1-3n^2}$ là : (A) $-\dfrac{1}{3}$; (B) $\dfrac{2}{3}$; (C) $+\infty$; (D) $-\infty$

b) $\lim(2^n-5^n)$ là : (A) $+\infty$; (B) 1; (C) $-\infty$; (D) $\dfrac{5}{2}$.

c) $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ là : (A) $+\infty$; (B) $-\infty$; (C) 0; (D) 1.

d) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$ là : (A) $+\infty$; (B) 0; (C) 2; (D) − 2.

Trả lời

a) $\lim\dfrac{n^3-2n}{1-3n^2}=\lim\dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{1}{n^3}-\dfrac{3}{n}}=-\infty$. Chọn (D).

b) $\lim(2^n - 5^n) = \lim 5^n\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1\right] = -\infty$. Chọn (C).

c) $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$. Chọn (C).

d) $\lim\frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n} = \lim\frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{n} = \lim\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right) = 2$. Chọn (C).

65. *a)* $\lim\frac{1 - 2^n}{3^n + 1}$ *là :* *(A)* $-\frac{2}{3}$; *(B)* 0; *(C)* 1; *(D)* $\frac{1}{2}$.

b) Tổng của cấp số nhân vô hạn : $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \ldots$ *là :*

(A) $-\frac{1}{4}$; *(B)* $\frac{1}{2}$; *(C)* -1; *(D)* $-\frac{1}{3}$

c) Số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,5111... được biểu diễn bởi phân số :

(A) $\frac{6}{11}$; *(B)* $\frac{46}{90}$; *(C)* $\frac{43}{90}$; *(D)* $\frac{47}{90}$.

Trả lời

a) $\lim\frac{1 - 2^n}{3^n + 1} = \lim\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 0$. Chọn (B).

b) Công bội $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{4} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{-\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$. Chọn (D).

c) $0{,}5111\ldots = 0{,}5 + 0{,}01 + 0{,}001 + \ldots$

$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots\right) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{46}{90}$. Chọn (B).

66. *a) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là* -1 *?*

(A) $\lim\frac{2n + 3}{2 - 3n}$; *(B)* $\lim\frac{n^2 - n^3}{2n^3 + 1}$;

(C) $\lim\frac{n^2 + n}{-2n - n^2}$; *(D)* $\lim\frac{n^3}{n^2 + 3}$.

b) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $+\infty$?

(A) $\lim\dfrac{n^2-3n+2}{n^2+n}$; (B) $\lim\dfrac{n^3+2n-1}{n-2n^3}$;

(C) $\lim\dfrac{2n^2-3n}{n^3+3n}$; (D) $\lim\dfrac{n^2-n+1}{2n-1}$.

c) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là 0 ?

(A) $\lim\dfrac{2^n+1}{3.2^n-3^n}$; (B) $\lim\dfrac{2^n+3}{1-2^n}$;

(C) $\lim\dfrac{1-n^3}{n^2+2n}$; (D) $\lim\dfrac{(2n+1)(n-3)^2}{n-2n^3}$.

Trả lời

a) $\lim\dfrac{2n+3}{2-3n}=\lim\dfrac{2+\dfrac{3}{n}}{\dfrac{2}{n}-3}=-\dfrac{2}{3}$

$$\lim\frac{n^2-n^3}{2n^3+1}=\lim\frac{\dfrac{1}{n}-1}{2+\dfrac{1}{n^3}}=-\frac{1}{2}$$

$\lim\dfrac{n^2+n}{-2n-n^2}=\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{-\dfrac{2}{n}-1}=-1$; $\lim\dfrac{n^3}{n^2+3}=+\infty$. Chọn (C)

b) $\lim\dfrac{n^2-3n+2}{n^2+n}=\lim\dfrac{1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}}=1$

$$\lim\frac{n^3+2n-1}{n-2n^3}=\lim\frac{1+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{1}{n^2}-2}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim\frac{2n^2-3n}{n^3+3n}=\lim\frac{\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n^2}}=0$$

$\lim\dfrac{n^2-n+1}{2n-1}=\lim\dfrac{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}=+\infty$. Chọn (D)

c) $\lim\frac{2^n+1}{3.2^n-3^n}=\lim\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{3.\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}=0$

$\lim\frac{2^n+3}{1-2^n}=\lim\frac{1+\frac{3}{2^n}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}=-1$; $\lim\frac{1-n^3}{n^2+2n}=-\infty$

$\lim\frac{(2n+1)(n-3)^2}{n-2n^3}=-1$. Chọn (A)

67. *Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây :*

a) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-3}{x^3+2}$ *là :* (A) 2; (B) 1; (C) -2 ; (D) $-\frac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{\frac{x^2}{x^3-x-6}}$ *là :* (A) $\frac{1}{2}$; (B) 2; (C) 3; (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to-4}\frac{x^2+3x-4}{x^2+4x}$ *là :* (A) $\frac{5}{4}$; (B) 1; (C) $-\frac{5}{4}$; (D) -1

Trả lời

a) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-3}{x^3+2}=\frac{1-3}{-1+2}=-2$. Chọn (C)

b) $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{\frac{x^2}{x^3-x-6}}=\sqrt{\frac{9}{27-3-6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Chọn (D)

c) $\lim\limits_{x\to-4}\frac{x^2+3x-4}{x^2+4x}=\lim\limits_{x\to-4}\frac{(x-1)(x+4)}{x(x+4)}=\lim\limits_{x\to-4}\frac{x-1}{x}=\frac{5}{4}$. Chọn (A)

68. *Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây :*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3}{x^6+5x^5}$ *là :* (A) 2; (B) 0; (C) $-\frac{3}{5}$; (D) -3

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x^5+7x^3-11}{x^5+x^4-3x}$ *là :* (A) 0; (B) -3; (C) 3; (D) $-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^5+x^4-3}{3x^2-7}$ *là :* (A) $-\infty$; (B) -2 ; (C) 0; (D) $+\infty$

Trả lời

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3}{x^6+5x^5}=\lim\dfrac{\dfrac{2}{x^4}-\dfrac{3}{x^6}}{1+\dfrac{5}{x}}=0$. Chọn (B)

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^5+7x^3-11}{x^5+x^4-3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3+\dfrac{7}{x^2}-\dfrac{11}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^4}}=-3$. Chọn (B)

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^5+x^4-3}{3x^2-7}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^5}}{\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{7}{x^5}}=+\infty$. Chọn (D)

69. *Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây :*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ *là :* (A) 1; (B) -1; (C) 0; (D) $+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ *là :* (A) $\dfrac{1}{2}$; (B) $-\dfrac{1}{2}$; (C) $+\infty$; (D) 0

c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ *là :* (A) 2; (B) -1; (C) $+\infty$; (D) $-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x}{x^2+3x+2}$ *là :* (A) 2; (B) $\dfrac{2}{3}$; (C) -1; (D) 0

Trả lời

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=1$. Chọn (A)

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x}{x(\sqrt{1-x}+1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}+1}=-\dfrac{1}{2}$. Chọn (B)

c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=+\infty$. Chọn (C)

d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x}{x^2+3x+2}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{x+2}=-1$. Chọn (C)

70. *a) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là -1 ?*

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{3x+x^2}$; *(B)* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{x^2-5x}$;

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^2+3}{5x^2-x^3}$; *(D)* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

b) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là 0 ?

(A) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^3-1}$; (B) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x+5}{2x+10}$;

(C) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$; (D) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$

c) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào không tồn tại ?

(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x^2+1}$; (B) $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$;

(C) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}}$; (D) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x}{(x+1)^2}$.

Trả lời

a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+x-1}{3x+x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x}+1} = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+3}{x^2-5x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{5}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-x^2+3}{5x^2-x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}+\frac{8}{x^3}}{\frac{5}{x}-1} = -1$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} (x-1) = -\infty$. Chọn (C)

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^3-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}$; $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x+5}{x+10} = \frac{1}{8}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$. Chọn (D)

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x^2+1} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}} = 0$; $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x}{(x+1)^2} = -\infty$

Không tồn tại $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$ (chọn 2 dãy $x_n - 2n\pi$ và $x'_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ và $\cos x'_n = 0$).

Chọn (B)

71. *Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau :*

Hàm số : $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x} & \text{với } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{với } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$$

(A) Liên tục tại mọi điểm trừ các điểm x thuộc đoạn [0; 1].

(B) Liên tục tại mọi điểm thuộc R.

(C) Liên tục tại mọi điểm x = 0.

(D) Liên tục tại mọi điểm trừ x = 1.

Trả lời

Tập xác định D = R

f liên tục trên $(-\infty; 0)$; $(0; 1)$ và $(1; +\infty)$

Tại x = 0 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0 = f(0)$

Suy ra f liên tục tại x = 0

Tại x = 1 $\lim\limits_{x \to 1^-} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2}{x} = 1$;

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x} = 1 = f(1)$.

Vậy f liên tục tại x = 1 nên f liên tục tại mọi điểm thuộc R.

Chọn (B)

Chương 5 ĐẠO HÀM

§1. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Đạo hàm của hàm số tại một điểm :

Khái niệm đạo hàm của hàm số tại một điểm :

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a; b) và điểm x_o *thuộc khoảng đó.*

Định nghĩa :

Giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ *khi x dần đến* x_o *được gọi là đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm* x_o*, kí hiệu là* $f'(x_o)$ *hoặc* $y'(x_o)$*, nghĩa là :*

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

Trong định nghĩa trên, nếu đặt $\Delta x = x - x_o$ *và* $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$ *thì ta có :*

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Chú ý :

1) Δx *được gọi là số gia của biến số tại* x_o *;*

số Δy *được gọi là số gia của hàm số ứng với số gia* Δx *tại* x_o*.*

2. Qui tắc tính đạo hàm theo định nghĩa :

Qui tắc :

Muốn tính đạo hàm của hàm số f tại điểm x_o *theo định nghĩa, ta thực hiện hai bước sau :*

- *Bước 1 : Tính* Δy *theo công thức* $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$*, trong đó* Δx *là số gia của biến số tại* x_o*.*
- *Bước 2 : Tìm giới hạn* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm :

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ *tại điểm* x_o *là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm* $M_o(x_o\ ;\ f(x_o))$

Chú ý :

Nếu hàm số $y = f(x)$ *có đạo hàm tại điểm* x_o *thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm* $M_o(x_o;\ f(x_o))$ *có phương trình là :*

$$y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$$

4. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm :

Vận tốc tức thời $v(t_o)$ *tại thời điểm* t_o *của một chuyển động có phương trình* $s = s(t)$ *bằng đạo hàm của hàm số* $s = s(t)$ *tại điểm* t_o, *tức là :* $v(t_o) = s'(t_o)$

5. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng :

a) Khái niệm :

Cho hàm số f xác định trên tập J, trong đó J là một khoảng hoặc là hợp của những khoảng nào đó.

Định nghĩa :

1) Hàm số f gọi là có đạo hàm trên J nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ *tại mọi điểm x thuộc J.*

2) Nếu hàm số f có đạo hàm trên J thì hàm số f xác định bởi

$$\begin{aligned} f' :& J \to R \\ & x \mapsto f'(x) \end{aligned}$$ *gọi là đạo hàm của hàm số f.*

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ *cũng được kí hiệu bởi* y'.

b) Đạo hàm của một số hàm số thường gặp :

Định lí :

a) Hàm số hằng $y = c'$ *có đạo hàm trên R và* $y' = 0$

b) Hàm số $y = x$ *có đạo hàm trên R và* $y' = 1$;

c) Hàm số $y = x^n$ $(n \in N,\ n \geq 2)$ *có đạo hàm trên R và* $y' = nx^{n-1}$;

d) Hàm số $y = \sqrt{x}$ *có đạo hàm trên khoảng* $(0; +\infty)$ *và* $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số tại một điểm.

- Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
- Tìm $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

2. Tìm điều kiện để hàm số có đạo hàm tại x_0

a) Để chứng minh f không có đạo hàm tại x_0 ta chứng minh

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

b) Điều kiện để f có đạo hàm tại x_0

- Để f có đạo hàm tại x_0, trước hết f phải liên tục tại x_0.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

- Mặt khác : $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra điều kiện cần tìm.

3. Phương trình tiếp tuyến :

a) Cho trước tiếp điểm có hoành độ x_0

- Tính $f(x_0)$ (thay x_0 vào y)
- Tính $f'(x_0)$ (thay x_0 vào y')
- Phương trình tiếp tuyến : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

b) Cho trước hệ số góc k.

- Tính hoành độ tiếp điểm x từ phương trình $f'(x) = k$
- Tính $f(x_0)$
- Phương trình tiếp tuyến : $y - f(x_0) = k(x - x_0)$

Chú ý :

- Đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc $a = \tan\alpha$ (α là góc của đường thẳng với Ox)
- Hai đường thẳng song song có cùng hệ số góc.
- Hai đường thẳng vuông góc có tích hệ số góc bằng -1.

1. *Tìm số gia của hàm số $y = x^2 - 1$ tại điểm $x_o = 1$ ứng với số gia Δx, biết :*
a) $\Delta x = 1$; *b) $\Delta x = -0,1$.*

Giải

Đặt $f(x) = x^2 - 1$

a) Ta có $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2) - f(1) = 3 - 0 = 3$

b) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(0,9) - f(1) = (0,9)^2 - 1 = -0,19$

2. *Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_o.*
a) $y = 2x + 1$, $x_o = 2$; *b) $y = x^2 + 3x$; $x_o = 1$.*

Giải

a) $f(x) = 2x + 1$, cho $x_0 = 2$ một số gia Δx

Ta có $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2 + \Delta x) - f(2)$

$= 2(2 + \Delta x) + 1 - 5 = 2\Delta x$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \quad \Rightarrow f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

b) $f(x) = x^2 + 3x$; cho $x_0 = 1$ một số gia Δx

Ta có $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1 + \Delta x) - f(1)$

$= (1 + \Delta x)^2 + 3(1 + \Delta x) - 4 = 5\Delta x + \Delta^2 x$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 5 + \Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 5.$$

Vậy $f'(1) = 5$

3. *Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_o (a là hằng số)*
a) $y = ax + 3$; *b) $y = \frac{1}{2}ax^2$.*

Giải

a) $f(x) = ax + 3$, cho x_0 một số gia Δx, ta có :

$\Delta y = f(x_0 - \Delta x) - f(x_0) = a(x_0 + \Delta x) + 3 - (ax_0 + 3) = a\Delta x$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

b) $f(x) = \frac{1}{2}ax^2$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$$= \frac{1}{2}a(x_0 + \Delta x)^2 - \frac{1}{2}ax_0^2 = \frac{1}{2}a\,\Delta x(2x_0 + \Delta x)$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{2}a(2x_0 + \Delta x) = ax_0$$

4. *Cho parabol $y = x^2$ và hai điểm $A(2; 4)$ và $B(2 + \Delta x; 4 + \Delta y)$ trên parabol đó.*
a) Tính hệ số góc của cát tuyến AB biết Δx lần lượt bằng 1; 0,1 và 0,01.
b) Tính hệ số góc của tiếp tuyến của parabol đã cho tại điểm A.

Giải

a) Ta có $A(2; 4)$; $B(2 + \Delta x, (2 + \Delta x)^2)$

Hệ số góc của cát tuyến AB là :

$$k = \frac{(2+\Delta x)^2 - 4}{2 + \Delta x - 2} = \frac{4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

- Nếu $\Delta x = 1$ thì $k = 5$
- Nếu $\Delta x = 0{,}1$ thì $k = 4{,}1$
- Nếu $\Delta x = 0{,}01$ thì $k = 4{,}01$

b) Hệ số góc tiếp tuyến của parabol tại A là :

$$k = y'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(4 + \Delta x) = 4$$

5. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$, biết :*

a) Tiếp điểm có hoành độ bằng -1;

b) Tiếp điểm có tung độ bằng 8;

c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

Giải

a) Ta có $x_0 = -1; y_0 = (-1)^3 = -1$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x + \Delta^3 x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta^2 x) = 3x_0^2$$

Với $x_0 = -1$ ta có $f'(-1) = 3(-1)^2 = 3$

Phương trình tiếp tuyến của đường cong tại tiếp điểm có hoành độ bằng -1 là :

$$y - (-1) = 3(x + 1) \Leftrightarrow y = 3x + 2$$

b) Với $y_0 = 8 = x_0^3 \Rightarrow x_0 = 2$

$f'(2) = 3.2^2 = 12$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là :

$y - 8 = 12(x - 2) \Leftrightarrow y = 12x - 16$

c) Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm ta có : $f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 3x_0^2 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$

- Với $x_0 = 1$ ta có $y_0 = 1$ và phương trình tiếp tuyến là :
  $y - 1 = 3(x - 1)$ hay $y = 3x - 2$
- Với $x_0 = -1$ ta có $y_0 = -1$ và phương trình tiếp tuyến là :
  $y + 1 = 3(x + 1)$ hay $y = 3x + 2$

6. *Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là* $S = \frac{1}{2}gt^2$, *trong đó* $g = 9{,}8m/s^2$ *và t được tính bằng (s).*

a) Tìm vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$ *với độ chính xác 0,001, biết* $t = 5$ *và* Δt *lần lượt bằng 0,1; 0,01; 0,001.*

b) Tìm vận tốc tại thời điểm $t = 5$.

Giải

a) Vận tốc trung bình của chuyển động là :

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2}g.\frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \frac{1}{2}g(2t + \Delta t = \frac{1}{2}g.(10 + \Delta t)$$

- Với $\Delta t = 0{,}1$ thì $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,.\,g\,.\,10{,}1 = 49{,}49$ m/s
- Với $\Delta t = 0{,}01$ thì $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,.\,g\,.\,10{,}01 = 49{,}049$ m/s
- Với $\Delta t = 0{,}001$ thì $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,.\,g\,.\,10{,}001 = 49{,}0049$ m/s

b) Vận tốc tại thời điểm $t = 5$: $v = S'(5) = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2}g.10 = 49\text{m/s}$

7. *Tìm đạo hàm của hàm số* $f(x) = x^5$ *trên R rồi suy ra* $f'(-1)$, $f'(-2)$ *và* $f'(2)$.

Giải

Với $x_0 \in R$

Ta có $$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^5 - x_0^5}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0}(x^4 + x^3x_0 + x^2x_0^2 + xx_0^4 + x_0^4) = 5x_0^4$$

$f'(-1) = 5$; $f'(-2) = 5.2^4 = 80$, $f'(2) = 80$.

8. *Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau trên R*

a) $y = ax^2$ *(a là hằng số) ;* *b)* $y = x^3 + 2$.

Giải

a) Với $x_0 \in R$ ta có :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a(x_0 + \Delta x)^2 - ax_0^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} a(2x_0 + \Delta x) = 2ax_0$$

b) Với $x_0 \in R$ ta có :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0 + \Delta x)^3 + 2 - x_0^3 - 2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}[(x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2] = 3x_0^2$$

9. *Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau :*

a) $y = \dfrac{1}{2x-1}$ *với* $x \neq \dfrac{1}{2}$; *b)* $y = \sqrt{3-x}$ *với* $x < 3$.

Giải

a) Với $x_0 \neq \dfrac{1}{2}$ ta có :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{2x_0 + 2\Delta x - 1} - \dfrac{1}{2x_0 - 1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\Delta x}{\Delta x(2x_0 + 2\Delta x - 1)(2x_0 - 1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2}{(2x_0 + 2\Delta x - 1)(2x_0 - 1)}$$

$$= \frac{-2}{(2x_0 - 1)^2}$$

b) Với $x_0 < 3$, ta có :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{3 - x_0 - \Delta x} - \sqrt{3 - x_0}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{\sqrt{3 - x_0 - \Delta x} + \sqrt{3 - x_0}} = \frac{-1}{2\sqrt{3 - x_0}}$$

10. ***a) Tính f'(3) và f'(−4) nếu*** $f(x) = x^3$;

b) Tính f'(1) và f'(9) nếu $f(x) = \sqrt{x}$.

Giải

a) Với $x_0 \in R$ ta có :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0}(x_0^2 + xx_0 + x_0^2) = 3x_0^2$$

Suy ra $f'(3) = 27$, $f'(-4) = 48$

b) Với $x_0 > 0$ ta có :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Suy ra $f'(1) = \dfrac{1}{2}$, $f'(9) = \dfrac{1}{6}$

11. ***Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm tại điểm*** x_0 ***và đồ thị (G). Mệnh đề sau đây đúng hay sai ?***

a) Nếu $f'(x_0) = 0$ ***thì tiếp tuyến của (G) tại điểm*** $M(x_0; f(x_0))$ ***song song với trục hoành.***

b) Nếu tiếp tuyến của (G) tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ ***song song với trục hoành thì*** $f'(x_0) = 0$.

Giải

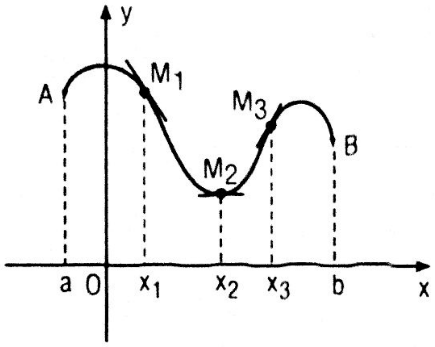
a) Mệnh đề sai vì tiếp tuyến có thể trùng với trục hoành.

Ví dụ : Cho hàm số $f(x) = x^2$ với $x_o = 0$ thì $f'(0) = 0$ và tiếp tuyến tại điểm $O(0; 0)$ trùng với trục hoành.

Mệnh đề sau đây mới đúng : "Nếu $f'(x_o) = 0$ thì tồn tại tiếp tuyến tại điểm $M_o(x_o;f(x_o))$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ song song hoặc trùng với trục hoành".

b) Mệnh đề đúng : vì nếu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_o(x_o;f(x_o))$ song song với trục hoành thì hệ số góc của tiếp tuyến phải bằng 0, suy ra $f'(x_o) = 0$.

12. *Hình bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$. Biết rằng tại các điểm M_1, M_2 và M_3, đồ thị hàm số có tiếp tuyến được thể hiện trên hình vẽ. Dựa vào hình vẽ, em hãy nêu nhận xét về dấu của $f'(x_1)$, $f'(x_2)$ và $f'(x_3)$.*



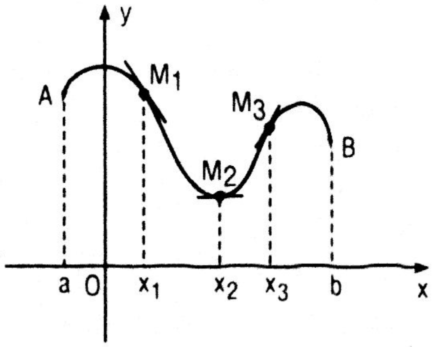
Giải

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có tiếp tuyến tại các điểm M_1, M_2 và M_3 nên hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại các điểm x_1, x_2 và x_3. Ta nhận thấy :

+ Tiếp tuyến tại điểm M_1 là một đường thẳng "đi xuống" từ trái sang phải, nên hệ số góc của tiếp tuyến là một số âm, suy ra $f'(x_1) < 0$

+ Tiếp tuyến tại điểm M_2 là một đường thẳng song song với trục hoành nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng 0, suy ra $f'(x_2) = 0$

+ Tiếp tuyến tại điểm M_3 là một đường thẳng "đi lên" từ trái sang phải, nên hệ số góc của tiếp tuyến là một số dương, suy ra $f'(x_3) > 0$.



13. *Chứng minh rằng để đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(x_o; f(x_o))$; điều kiện cần và đủ là :*

$$\begin{cases} a = f'(x_o) \\ ax_o + b = f(x_o) \end{cases}$$

Giải

Đường thẳng (d) : $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị (G) của hàm số f tại điểm $(x_o; f(x_o))$ khi và chỉ khi đồng thời xảy ra :

- (d) và (G) cùng đi qua điểm $(x_o; f(x_o))$, tức là $ax_o + b = f(x_o)$
- Hệ số góc của (d) bằng đạo hàm của f tại x_o, tức là $a = f'(x_o)$.

Từ đó suy ra đpcm.

14. *Cho hàm số $y = |x|$*

a) Chứng minh rằng hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 0$;

b) Tính đạo hàm của hàm số tại $x = 0$, nếu có.

c) Mệnh đề "Hàm số liên tục tại điểm x_o thì có đạo hàm tại x_o" đúng hay sai ?

Giải

a) Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$

Vậy f liên tục tại $x = 0$

b) Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x}{x} = -1$

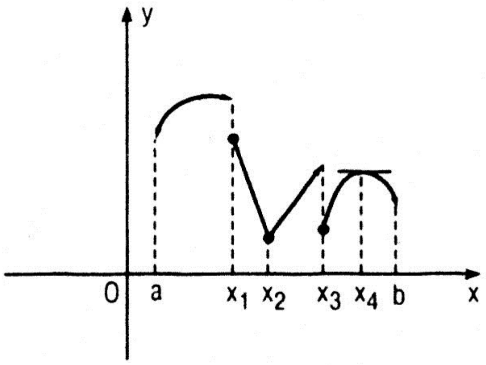
Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ nên hàm số f không có đạo hàm tại $x = 0$

c) Mệnh đề sai. Thật vậy, hàm số $f(x) = |x|$ liên tục tại điểm 0 (theo câu a) nhưng không có đạo hàm tại điểm đó (theo câu b).

15. *Hình bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$. Dựa vào hình vẽ hãy cho biết tại mỗi điểm x_1, x_2, x_3 và x_4 :*

a) Hàm số có liên tục hay không ?

b) Hàm số có đạo hàm hay không ? Hãy tính đạo hàm nếu có.



Giải

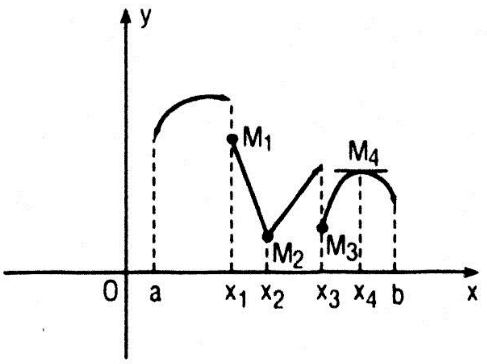
Căn cứ vào hình ta nhận thấy :

+ Hàm số đã cho gián đoạn tại các điểm x_1 và x_3; vì đồ thị hàm số bị ngắt quãng khi đi qua các điểm M_1 và M_3.

+ Hàm số đã cho liên tục tại các điểm x_2 và x_4; vì đồ thị hàm số là đường "liền nét" khi đi qua các điểm M_2 và M_4.

+ Hàm số không có đạo hàm tại điểm x_2; vì điểm M_2 đồ thị là đường "gấp khúc" (và hiển nhiên tại đó không có tiếp tuyến của đồ thị hàm số), giống như đồ thị hàm số $y = |x|$.

+ Hàm số có đạo hàm tại điểm M_4 và $f'(x_4) = 0$; vì tại điểm M_4 đồ thị của hàm số có tiếp tuyến và tiếp tuyến này song song với trục hoành.



BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Dùng định nghĩa tính đạo hàm hàm số :*

a) $y = \cos x$; *b)* $y = \dfrac{x}{1+|x|}$ *tại* $x_o = 0$

Đáp số : a) $-\sin x$; *b)* $f'(0) = 1$

2. *Cho* $f(x) = x^2 + 3|x - 1|$. *Tính* $f'(2)$, $f'(-2)$.

Hàm số có đạo hàm tại $x = 1$ *không ?*

Đáp số : $f'(2) = 7$, $f'(-2) = -7$, *f không có đạo hàm tại* $x = 1$.

3. *Cho hàm số* $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x^2} & \text{khi } -\sqrt{2} \le x \le 1 \\ x^2 + bx + c \text{ khi} & x > 1 \end{cases}$

Tìm b, c để hàm số f có đạo hàm tại $x = 1$

Hướng dẫn :

- *Từ điều kiện f liên tục tại* $x = 1 \Rightarrow b + c = 0$
- *Đạo hàm hai phía bằng nhau suy ra* $2 + b = -1$. *Vậy* $b = -3$, $c = 3$

4. *Cho* $y = x^2 - 2x + 3$. *Viết phương trình tiếp tuyến*

a) Tại điểm có hoành độ $x_o = 1$

b) Song song với đường thẳng $4x - 2y + 5 = 0$

c) Vuông góc với đường thẳng $x + 4y = 0$

d) Hợp với trục Ox một góc 45^o.

Đáp số : a) $y = 2$; *b)* $y = 2x - 1$; *c)* $y = 4x - 6$

§2. CÁC QUI TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Đạo hàm của tổng hay hiệu hai hàm số :

Định lí 1 :

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ *và* $v = v(x)$ *có đạo hàm trên* J *thì hàm số* $y = u(x) + v(x)$ *và* $y = u(x) - v(x)$ *cũng có đạo hàm trên* J*, và :*

a) $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x);$

b) $[u(x) - v(x)]' = u'(x) - v'(x)$

Các công thức trên có thể viết gọn là :

$$\boxed{(u + v)' = u' + v' \text{ và } (u - v)' = u' - v'}$$

2. Đạo hàm của tích hai hàm số :

Định lí 2 :

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ *và* $v = v(x)$ *có đạo hàm trên* J *thì hàm số* $y = u(x)v(x)$ *cũng có đạo hàm trên* J*, và :*

$$[u(x)v(x)]' = u'(x).v(x) + u(x)v'(x);$$

Đặc biệt, nếu k *là hằng số thì* $[ku(x)]' = ku'(x)$

Các công thức trên có thể viết gọn là :

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv' \text{ và } (ku)' = ku'}$$

3. Đạo hàm của thương hai hàm số :

Định lí 3 :

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ *và* $v = v(x)$ *có đạo hàm trên* J *và* $v(x) \neq 0$ *với mọi* $x \in J$ *thì hàm số* $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ *cũng có đạo hàm trên* J *và*

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

Công thức trên có thể viết gọn là :

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

Hệ quả :

a) Trên $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ *ta có* $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

b) Nếu hàm số $v = v(x)$ *có đạo hàm trên* J *và* $v(x) \neq 0$ *với mọi* x *thuộc* J *thì trên* J *ta có* $\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = \frac{v'(x)}{v^2(x)}$

Công thức thứ hai trong hệ quả trên có thể viết gọn là :

$$\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}}$$

4. Đạo hàm của hàm số hợp :

a) Khái niệm hàm số hợp :

Cho hai hàm số $y = f(u)$ *và* $u = u(x)$. *Thay biến* u *trong biểu thức* $f(u)$ *bởi biểu thức* $u(x)$, *ta được biểu thức* $f[u(x)]$ *với biến* x. *Khi đó, hàm số* $y = g(x)$ *với* $g(x) = f[u(x)]$ *được gọi là hàm số hợp của hai hàm số* f *và* u; *hàm số* u *gọi là hàm số trung gian. (Tất nhiên, ta chỉ xét các giá trị của biến* x *sao cho* $f[u(x)]$ *là xác định).*

b) Cách tính đạo hàm của hàm số hợp :

Định lí 4 :

a) Nếu hàm số $u = u(x)$ *có đạo hàm tại điểm* x_o *và hàm số* $y = f(u)$ *có đạo hàm tại điểm* $u_o = u(x_o)$ *thì hàm số hợp* $g(x) = f[u(x)]$ *có đạo hàm tại điểm* x_o *và* $g'(x_o) = f'(u_o).u'(x_o)$

b) Nếu giả thiết trong phần a) được thỏa mãn đối với mọi điểm x *thuộc* J *thì hàm số hợp* $y = g(x)$ *có đạo hàm trên* J *và* $g'(x) = f'[u(x)].u'(x)$

Công thức thứ hai trong định lý trên còn được viết gọn là :

$$\boxed{g'_x = f'_u.u'_x}$$

Hệ quả 1 :

Nếu hàm số $u = u(x)$ *có đạo hàm trên* J *thì hàm số* $y = u''(x)$ *(với* $n \in N$ *và* $n \geq 2$*) có đạo hàm trên* J *và*

$$[u^n(x)]' = n.u^{n-1}(x).u'(x)$$

Công thức nêu trong hệ quả 1 được viết gọn là :

$$\boxed{(u^n)' = n.u^{n-1}u'}$$

Hệ quả 2 :

Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J và $u(x) > 0$ với mọi $x \in J$ thì hàm số $y = \sqrt{u(x)}$ có đạo hàm trên J và

$$(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Công thức nêu trong hệ quả 2 được viết gọn là :

$$\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

Ghi nhớ :

a) Đạo hàm của một số hàm số thường gặp (ở đây $u = u(x)$)

$(c)' = 0$ (c là hằng số)	
$(x)' = 1$	
$(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in N,\ n \geq 2)$	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

b) Các qui tắc tính đạo hàm (ở đây $u = u(x)$, $v = v(x)$)

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u.v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

c) Đạo hàm của hàm số hợp (ở đây $g(x) = f[u(x)]$)

$$g'_x = f'_u \cdot u'_x$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

16. *Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_o được cho kèm theo.*

a) $y = 7 + x - x^2,\ x_o = 1;$ b) $y = x^3 - 2x + 1,\ x_o = 2;$

c) $y = 2x^5 - 2x + 3,\ x_o = 1.$

Giải

a) $y' = 1 - 2x \Rightarrow y'(1) = -1$

b) $y' = 3x^2 - 2 \Rightarrow y'(2) = 10$

c) $y' = 10x^4 - 2 \Rightarrow y'(1) = 8$

17. *Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau (a và b là hằng số) :*

a) $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3\sqrt{x}$; b) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0{,}5x^4$;

c) $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + a^3$; d) $y = \frac{ax + b}{a + b}$.

Giải

a) $y' = 5x^4 - 12x^2 + 2 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$

b) $y' = -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$

c) $y' = x^3 - x^2 + x - 1$

d) $y = \frac{a}{a + b}$

18. *Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau :*

a) $y = (x^7 + x)^2$; b) $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$;

c) $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$; d) $y = \frac{5x - 3}{x^2 + x + 1}$;

e) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$; f) $y = x(2x - 1)(3x + 2)$.

Giải

a) Ta có : $y = x^{14} + 2x^8 + x^2 \Rightarrow y' = 14x^{13} + 16x^7 + 2x$

b) $y' = (x^2 + 1)'(5 - 3x^2) + (x^2 + 1)(5 - 3x^2)'$

$= 2x(5 - 3x^2) - 6x(x^2 + 1) = 4x - 12x^3$

c) $y' = \frac{2(x^2 - 1) - 2x(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$

d) $y' = \frac{5(x^2 + x + 1) - (5x - 3)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-5x^2 + 6x + 8}{(x^2 + x + 1)^2}$

e) $y' = \frac{(2x + 2)(x + 1) - (x^2 + 2x + 2)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$

f) $y = (2x^2 - x)(3x + 2)$

$\Rightarrow y' = (4x - 1)(3x + 2) + (2x^2 - x)3 = 18x^2 + 2x - 2$

19. *Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau :*

a) $y = (x - x^2)^{32}$; b) $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$;

c) $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$; d) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ *(a là hằng số).*

Giải

a) $y' = 32(x - x^2)^{31}(1 - 2x)$

b) $$y' = -\frac{(x\sqrt{x})'}{x^3} = -\frac{\sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}}}{x^3} = \frac{-3x}{2\sqrt{x}.x^3} = \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$$

c) $$y' = \frac{\sqrt{1-x} - (1+x).\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \frac{2(1-x)+1+x}{2\sqrt{(1-x)^3}} = \frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$$

d) $$y' = \frac{\sqrt{a^2-x^2} - x.\dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{(\sqrt{a^2-x^2})^2} = \frac{2(a^2-x^2)+2x^2}{2(\sqrt{a^2-x^2})^3} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$$

20. *Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.*

Hãy giải bất phương trình $f'(x) \le f(x)$.

Giải

Vì $f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ nên ta cần giải bất phương trình $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \le \sqrt{x^2-2x}$

Ta có : $$\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \le \sqrt{x^2-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ hoặc } x > 2 \\ x - 1 \le x^2 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ hoặc } x > 2 \\ x \le \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } x \ge \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; 0) \cup \left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$

21. *Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Hãy giải bất phương trình :*

a) $f'(x) > 0$; *b) $f'(x) \le 3$.*

Giải

Ta có : $f'(x) = 3x^2 - 6x$

a) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ hoặc $x > 2$

b) $f'(x) \le 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x \le 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \le 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \le x \le 1 + \sqrt{2}$.

22. *Tìm các nghiệm của phương trình sau (làm tròn kết quả nghiệm gần đúng đến hàng phần nghìn).*

a) $f'(x) = 0$ với $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - 6x - 1$;

b) $f'(x) = -5$ với $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - \dfrac{3x^2}{2} - 3$

Giải

a) $f'(x) = x^2 - 4x - 6$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 - \sqrt{10} \approx -1{,}162 \\ x = 2 + \sqrt{10} \approx 5{,}162 \end{array}\right.$$

b) Ta có $y' = x^3 - 3x^2 - 3x$. Do đó :

$$y' + 5 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 5) = 0$$

Phương trình có ba nghiệm là $1, 1 + \sqrt{6}$ và $1 - \sqrt{6}$.

Vậy các nghiệm gần đúng của phương trình với sai số tuyệt đối không vượt quá 0,001 là :

$$x_1 = 1\ ; \qquad x_2 = 3{,}449 \pm 0{,}001\ ; \qquad x_3 = -1{,}449 \pm 0{,}001$$

23. *Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau :*

a) $y = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}$; b) $y = \dfrac{1}{(x^2 - x + 1)^5}$;

c) $y = x^2 + x\sqrt{x} + 1$; d) $y = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3$;

e) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x}}$.

Giải

a) $y' = \dfrac{2(x^2 - 5x + 5) - (2x + 3)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 5)^2} = \dfrac{-2x^2 - 6x + 25}{(x^2 - 5x + 5)^2}$

b) $y' = \dfrac{-5(x^2 - x + 1)^4(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^{10}} = \dfrac{-5(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^6}$

c) $y' = 2x + \sqrt{x} + x.\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2x + \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

d) $y' = (x + 2)^2(x + 3)^2 + (x + 1).2(x + 2)(x + 3)^3 + (x + 1)(x + 2)^2 3(x + 3)^2$

$= 2(x + 2)(x + 3)^2(3x^2 + 11x + 9)$

e) $y = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}} \Rightarrow y' = \dfrac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{2\sqrt{x + \dfrac{1}{x}}} = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2\sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x}}}$

24. *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số :*

a) $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$, *biết hoành độ tiếp điểm là* $x_o = 0$;

b) $y = \sqrt{x + 2}$, *biết tung độ tiếp điểm là* $y_o = 2$.

Giải

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ $\qquad x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = f(0) = -1$

$$f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(0) = 2$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là :

$$y - (-1) = 2(x - 0) \quad \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

b) $f(x) = \sqrt{x+2}$; $f(x_0) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x_0 + 2} = 2 \Leftrightarrow x_0 = 2$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \quad \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{4}$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là :

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 2) \quad \Leftrightarrow y = \frac{x+6}{4}$$

25. *Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2$, biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(0; -1)$.*

Hướng dẫn : *Trước hết viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 thuộc parabol đã cho. Sau đó tìm x_0 để tiếp tuyến đi qua điểm A (chú ý rằng điểm A không thuộc parabol).*

Giải

Đặt $f(x) = x^2$ và gọi M_0 là điểm thuộc $(\mathcal{P})$ với hoành độ x_0. Khi đó tọa độ của điểm M_0 là $(x_0; f(x_0))$ hay $(x_0; x_0^2)$

Cách 1 : Ta có $y' = 2x$. Phương trình tiếp tuyến của $(\mathcal{P})$ tại điểm M_0 là :

$$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 \Leftrightarrow y = 2x_0x - x_0^2$$

Tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(0; -1)$ nên ta có :

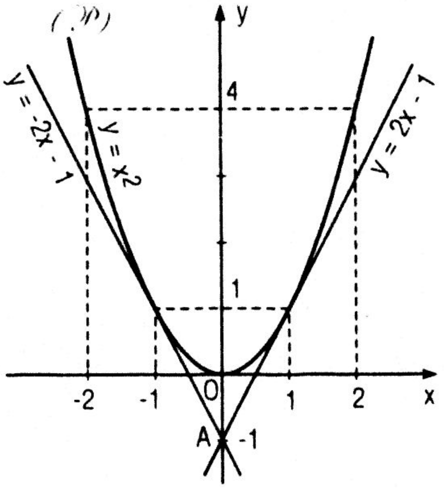
$$-1 = 2x_0 \,.\, 0 - x_0^2 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1.$$

+ Với $x_0 = 1$ thì $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = 2$ và phương trình tiếp tuyến phải tìm là :

$$y = 2(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

+ Với $x_0 = -1$ thì $f(x_0) = 1$, $f'(x_0) = -2$ và phương trình tiếp tuyến phải tìm là :

$$y = -2(x + 1) + 1 \Leftrightarrow y = -2x - 1$$



Vậy có hai tiếp tuyến của $(\mathcal{P})$ đi qua A với các phương trình tương ứng là $y = \pm 2x - 1$

Cách 2 : Phương trình đường thẳng (d) đi qua $A(0; -1)$ với hệ số góc k là :

$$y = kx - 1$$

Để (d) tiếp xúc $(\mathscr{P})$ tại điểm M_0 điều kiện cần và đủ là (xem bài tập 13)

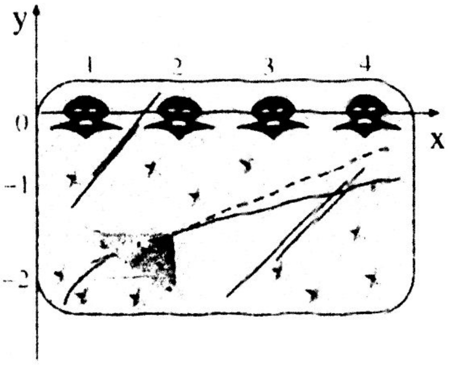
$$\begin{cases} f(x_0) = kx_0 - 1 \\ f'(x_0) = k \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x_0^2 = kx_0 - 1 \\ 2x_0 = k \end{cases}$$

Khử x_0 từ hệ này ta tìm được $k = \pm 2$.

Vậy có hai tiếp tuyến của $(\mathscr{P})$ đi qua điểm A(0; – 1) với các phương trình là :

$$y = \pm 2x - 1$$

26. *Hình bên thể hiện màn hình của một trò chơi điện tử. Một máy bay xuất hiện ở bên trái màn hình rồi bay sang phải theo một quỹ đạo (C) có phương trình $y = f(x)$, trong đó $f(x) = -1 - \frac{1}{x}$, $(x > 0)$. Biết rằng tên lửa được bắn ra từ máy bay tại một điểm thuộc (C) sẽ bay theo phương tiếp tuyến của (C) tại điểm đó. Tìm hoành độ các điểm thuộc (C) sao cho tên lửa bắn ra từ đó có thể bắn trúng một trong bốn mục tiêu nằm ở trên màn hình có tọa độ (1; 0), (2; 0), (3; 0) và (4; 0) (làm tròn kết quả đến hàng phần vạn).*



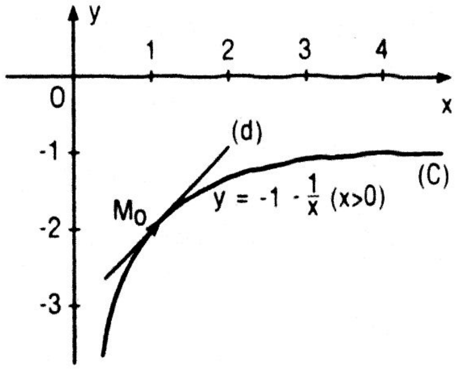
Giải

Ta có $f'(x) = \frac{1}{x^2}$

Phương trình tiếp tuyến (d) của quỹ đạo (C) tại tiếp điểm $M_0\left(x_0; -1 - \frac{1}{x_0}\right)$ là :

$$y = \frac{1}{x_0^2}(x - x_0) - 1 - \frac{1}{x_0},$$

hay $x_0^2 + 2x_0 - x + x_0^2 y = 0$.



Ta phải tìm $x_0 > 0$, sao cho (d) lần lượt đi qua bốn điểm có tọa độ (1; 0), (2; 0), (3; 0) và (4; 0).

a) Với $x = 1$, $y = 0$, ta có $x_0^2 + 2x_0 - 1 = 0$. Suy ra $x_0 = -1 + \sqrt{2} \approx 0{,}4142$;

b) Với $x = 2$, $y = 0$ ta có $x_0^2 + 2x_0 - 2 = 0$. Suy ra $x_0 = -1 + \sqrt{3} \approx 0{,}7321$;

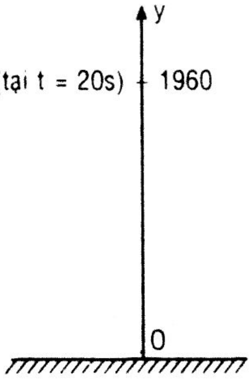
c) Với $x = 3$, $y = 0$ ta có $x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0$. Suy ra $x_0 = -1 + 2 = 1$

d) Với $x = 4$, $y = 0$ ta có $x_0^2 + 2x_0 - 4 = 0$. Suy ra $x_0 = -1 + \sqrt{5} \approx 1{,}2361$.

27. *Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196 m/s$ (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó, viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét ?*

Giải

Cho Oy theo phương thẳng đứng, chiều dương hướng từ mặt đất lên trời, gốc O là vị trí viên đạn được bắn lên, khi đó phương trình chuyển động của viên đạn là :



$$y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \ (g = 9,8 \text{ m/s}^2).$$

Ta có vận tốc tại thời điểm t là :

$$v = y'(t) = v_0 - gt$$

Do đó : $v = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{g} = \frac{196}{9,8} = 20(s)$

Vậy khi t = 20s thì viên đạn bắt đầu rơi, lúc đó viên đạn cách mặt đất :

$$y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = 196.20 - \frac{1}{2}.\ 9,8.20^2 = 1960 \text{ (m)}$$

BÀI TẬP LÀM THÊM

Tính đạo hàm các hàm số sau :

1. a) $y = (x^4 + 1)(\sqrt{x} + 1)$; b) $y = \frac{x^2 + x + 1}{2x + 1}$;

c) $y = (3x^5 - 1)^3$; d) $y = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$.

2. a) $y = \sqrt{x^3 - 2x + 1}$; b) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

3. a) $y = \frac{\sqrt{x^2 + x + 3}}{2x + 1}$; b) $y = (x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}$.

4. a) $y = \frac{ax + b}{cx + d}$; b) $y = \frac{ax^2 + bx + c}{ex + f}$

Đáp số : 1. a) $y' = 4x^3(\sqrt{x} + 1) + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^4 + 1)$; b) $y' = \frac{2x^2 + 2x - 1}{(2x + 1)^2}$

c) $y' = 45x^4(3x^5 - 1)^2$; d) $y' = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^3}$

2. a) $y' = \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{x^3 - 2x + 1}}$; b) $y' = -\frac{2x + 1}{2\sqrt{(x^2 + x + 1)^3}}$

3. a) $y' = \frac{-11}{2(2x + 1)^2\sqrt{x^2 + x + 3}}$; b) $y' = \frac{4x^2 + 5x + 3}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$

4. a) $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$; b) $y' = \frac{acx^2 + 2afx + bf - ce}{(ex + f)^2}$

§3. ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Giới hạn : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

Định lí 1 :

- $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$
- *Nếu hàm số u = u(x) thỏa mãn các điều kiện :* $u(x) \neq 0$ *với mọi* $x \neq x_o$ *và* $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = 0$ *thì*

$$\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1}$$

2. Đạo hàm của hàm số y = sinx :

Định lí 2 :

a) Hàm số $y = \sin x$ *có đạo hàm trên R, và* $(\sin x)' = \cos x$

b) Nếu hàm số $u = u(x)$ *có đạo hàm trên J thì trên J ta có :*

$$[\sin(u(x))]' = \cos(u(x))\,.\,u'(x).$$

3. Đạo hàm của hàm số y = cosx :

Định lí 3 :

a) Hàm số $y = \cos x$ *có đạo hàm trên R và* $(\cos x)' = -\sin x$

b) Nếu hàm số $u = u(x)$ *có đạo hàm trên J thì trên J ta có*

$$\cos(u(x))' = (-\sin(u(x))\,.\,u'x$$

hay : $\boxed{(\cos u)' = -u'\sin u}$

4. Đạo hàm của hàm số y = tanx :

Định lí 4 :

a) Hàm số $y = \tan x$ *có đạo hàm trên mỗi khoảng* $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ *(với* $k \in Z$*), và* $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$

b) Giả sử hàm số $u = u(x)$ *có đạo hàm trên J và* $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$ *với mọi* $x \in J$*. Khi đó, trên J ta có :* $[\tan(u(x))]' = \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$

hay : $\boxed{(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}}$

5. Đạo hàm của hàm số y = cotx :

Định lí 5 :

a) Hàm số y = cotx có đạo hàm trên mỗi khoảng $(k\pi; (k+1)\pi)$ (với $(k \in Z)$ và $(cotx)' = -\dfrac{1}{sin^2x}$.

b) Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J và $u(x) \neq k\pi$ $(k \in Z)$ với mọi $x \in J$. Khi đó trên J ta có :

$$[cot(u(x))]' = -\frac{u'(x)}{sin^2(u(x))}$$

hay : $\boxed{(cotu)' = -\dfrac{u'}{sin^2u}}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

28. *Tìm các giới hạn sau :*

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tan2x}{sin5x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos^2x}{xsinx}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+sinx-cosx}{1-sinx-cosx}$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{2x}.\dfrac{5x}{\sin 5x}.\dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2x}{2x\sin x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x\cos x} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}} = -1$

29. *Tính đạo hàm của các hàm số sau :*

a) $y = 5sinx - 3cosx$; b) $y = sin(x^2 - 3x + 2)$;

c) $y = cosx\sqrt{2x+1}$; d) $y = 2sin3xcos5x$;

e) $y = \dfrac{sinx + cosx}{sinx - cosx}$; f) $y = \sqrt{cos2x}$.

Giải

a) $y' = 5\cos x + 3\sin x$

b) $y' = (2x - 3)\cos(x^2 - 3x + 2)$

c) $y' = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}}(-\sin\sqrt{2x+1}) = \dfrac{-\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$

d) $y = \sin 8x - \sin 2x \Rightarrow y' = 8\cos 8x - 2\cos 2x$

e) $y' = \dfrac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = \dfrac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$

f) $y' = \dfrac{-2\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}} = -\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

30. *Chứng minh rằng hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$ có đạo hàm bằng 0.*

Giải

Ta có $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) + 3\sin^2 x\cos^2 x$

$= \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1 \Rightarrow y' = 0$

31. *Tìm đạo hàm của các hàm số sau :*

a) $y = \tan\dfrac{x+1}{2}$; *b)* $y = \cot\sqrt{x^2 + 1}$;

c) $y = \tan^3 x + \cot 2x$; *d)* $y = \tan 3x - \cot 3x$;

e) $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$; *f)* $y = x\cot x$

Giải

a) $y' = \dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x+1}{2}}$; b) $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \dfrac{1}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}$

c) $y' = \dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{2}{\sin^2 2x}$; d) $y' = \dfrac{3}{\cos^2 3x} + \dfrac{3}{\sin^2 3x} = \dfrac{12}{\sin^2 6x}$

e) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1 + 2\tan x}}$; f) $y' = \cot x - \dfrac{x}{\sin^2 x}$

32. *Chứng minh rằng :*

a) Hàm số $y = \tan x$ thỏa mãn hệ thức $y' - y^2 - 1 = 0$

b) Hàm số $y = \cot 2x$ thỏa mãn hệ thức $y' + 2y^2 + 2 = 0$

Giải

a) $y' = 1 + \tan^2 x$. Do đó $y' - y^2 - 1 = (1 + \tan^2 x) - \tan^2 x - 1 = 0$

b) $y' = -2(1 + \cot^2 2x)$. Do đó $y' + 2y^2 + 2 = -2(1 + \cot^2 2x) + 2\cot^2 2x + 2 = 0$

33. *Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau :*

a) $y = \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x}$; *b)* $y = \dfrac{\sin^2 x}{1 + \tan 2x}$;

c) $\tan(\sin x)$; *d)* $y = x\cot(x^2 - 1)$;

e) $y = \cos^2\sqrt{\dfrac{\pi}{4} - 2x}$; *f)* $y = x\sqrt{\sin 3x}$

Giải

a) $y' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} + \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = (x\cos x - \sin x)\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

b) $y' = \dfrac{2\sin x\cos x(1+\tan 2x) - \sin^2 x.2(1+\tan^2 2x)}{(1+\tan 2x)^2}$

$= \dfrac{\sin 2x}{(1+\tan 2x)} - \dfrac{2\sin^2 x(1+\tan^2 2x)}{(1+\tan x)^2}$

c) $y' = \dfrac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$;

d) $y' = \cot(x^2-1) + x.\dfrac{-2x}{\sin^2(x^2-1)} = \cot(x^2-1) - \dfrac{2x^2}{\sin^2(x^2-1)}$

e) $y = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2\sqrt{\dfrac{\pi}{4} - 2x})$, $\quad y' = -\dfrac{1}{2}.2\dfrac{-2}{2\sqrt{\dfrac{\pi}{4}-2x}} = \dfrac{2\sin\sqrt{\pi-8x}}{\sqrt{\pi-8x}}$

f) $y' = \sqrt{\sin 3x} + x.\dfrac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}} = \dfrac{\sin 3x + 3x\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$

34. *Tính $f'(\pi)$ nếu $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x - x\sin x}$*

Giải

Với mọi x sao cho $\cos x - x\sin x \neq 0$, ta có :

$$f'(x) = \frac{[\cos x - (\cos x - x\sin x)](\cos x - x\sin x) - (\sin x - x\cos x)[-\sin x - (\sin x + x\cos x)]}{(\cos x - x\sin x)^2}$$

Vì $\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$ nên : $f'(\pi) = \dfrac{[-1-(-1)](-1) - \pi.\pi}{(-1)^2} = -\pi^2$

35. *Giải phương trình $y' = 0$ trong mỗi trường hợp sau :*

a) $y = \sin 2x - 2\cos x$; *b) $y = 3\sin 2x + 4\cos 2x + 10x$;*

c) $y = \cos^2 x + \sin x$; *d) $y = \tan x + \cot x$.*

Giải

a) Với mọi $x \in R$, ta có : $y' = 2\cos 2x + 2\sin x = 2(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x$

Vậy $y' = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \quad (k\pi \in Z) \end{array}\right.$$

b) Với mọi $x \in R$, ta có : $y' = 6\cos 2x - 8\sin 2x + 10$

Vậy $y' = 0 \Leftrightarrow 4\sin 2x - 3\cos 2x = 5$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{5}\sin 2x - \dfrac{3}{5}\cos 2x = 1$ (1)

Vì $\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = 1$ nên có số α sao cho $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ và $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$

Thay vào (1), ta được :

$$\sin 2x\cos\alpha - \sin\alpha\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin(2x - \alpha) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x - \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)\ (k \in Z)$$

c) Với mọi $x \in R$, ta có : $y' = -2\cos x\sin x + \cos x = \cos x(1 - 2\sin x)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ hoặc $1 - 2\sin x = 0$

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $1 - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$

Vậy đáp số là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in Z)$

d) $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$ với mọi $x \neq k\frac{\pi}{2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \tan^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$$

36. *Cho hàm số $f(x) = 2\cos^2(4x - 1)$. Chứng minh rằng với mọi x ta có $|f'(x)| \leq 8$. Tìm các giá trị của x để đẳng thức xảy ra.*

Giải

Với mọi $x \in R$, ta có :

$$f'(x) = 2.2\cos(4x - 1)\,.\,[-\sin(4x - 1)]4 = -8\sin 2(4x - 1)$$

Suy ra $|f'(x)| = 8|\sin 2(4x - 1)| \leq 8$.

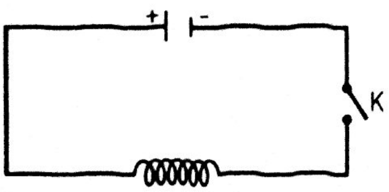
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\sin 2(4x - 1) = \pm 1 \Leftrightarrow 2(4x - 1) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{8} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}(\pi + 4 + k2\pi)\ (k \in Z)$$

37. *Cho mạch điện như hình vẽ. Lúc đầu tụ điện có điện tích Q_o. Khi đóng khóa K, tụ điện phóng điện qua cuộn dây; điện tích q của tụ điện phụ thuộc vào thời gian t theo công thức $q(t) = Q_o\sin\omega t$, trong đó, ω là tốc độ góc. Biết rằng cường độ I(t) của dòng điện tại thời điểm t được tính theo công thức $I(t) = q'(t)$.*

Cho biết $Q_o = 10^{-8}C$ và $\omega = 10^6\pi$ rad/s. Hãy tính cường độ của dòng điện tại thời điểm t = 6s (tính chính xác đến 10^{-5}mA).



Giải

Cường độ dòng điện tại thời điểm t là :

$$I(t) = q'(t) = Q_0\omega\cos\omega t$$

Khi $Q_0 = 10^{-8}C$ và $\omega = 10^6\pi$ rad/s thì cường độ dòng điện tại thời điểm t = 6s là : $I(6) = 10^{-8}.10^6\pi.\cos(10^6\pi.6) = \frac{\pi}{100}(A) \approx 31,41593$ (mA).

38. *Cho hàm số $y = \cos^2x + m\sin x$ (m là tham số) có đồ thị là (C). Tìm m trong mỗi trường hợp sau :*

a) Tiếp tuyến của (C) tại điểm với hoành độ $x = \pi$ có hệ số góc bằng 1.

b) Hai tiếp tuyến của (C) tại các điểm có hoành độ $x = -\frac{\pi}{4}$ và $x = \frac{\pi}{3}$ song song với nhau hoặc trùng nhau.

Giải

Đặt $f(x) = \cos^2x + m\sin x$, ta có :

$$f'(x) = -\sin 2x + m\cos x$$

a) Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = \pi$ là :

$$f'(\pi) = -\sin 2\pi + m\cos\pi = -m.$$

Vậy $f'(\pi) = 1 \Leftrightarrow m = -1$

b) Điều kiện của bài toán có nghĩa là $f'(-\frac{\pi}{4}) = f'(\frac{\pi}{3})$. Ta có :

$$f'(-\frac{\pi}{4}) = f'(\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow -\sin(-\frac{\pi}{2}) + m\cos(-\frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{2\pi}{3} + m\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 + m\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{m}{2} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{3}+2}{1-\sqrt{2}}$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Chứng minh rằng đạo hàm của hàm số sau không phụ thuộc vào x :*

$$y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2x$$

Đáp số : $y' = 0$

2. *Giải phương trình $y' = 0$ với $y = 3\cos x + 4\sin x + 5x$*

3. *Tính đạo hàm của :*

a) $y = \cos^2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; *b) $\sin[\cos^2(\tan^3x)]$*

§4. VI PHÂN

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Vi phân của hàm số tại một điểm :

Tích $f'(x_o)\Delta x$ *được gọi là vi phân của hàm số* $y = f(x)$ *tại điểm* x_o *(ứng với số gia* Δx*) và được kí hiệu là* $df(x_o)$*, tức là :*

$$\boxed{df(x_o) = f'(x_o)\Delta x.}$$

2. Ứng dụng của vi phân vào tính gần đúng :

$$\boxed{f(x_o + \Delta x) \approx f(x_o) + f'(x_o)\Delta x} \qquad (1)$$

3. Vi phân của hàm số :

Nếu hàm số f có đạo hàm f' thì tích $f'(x)\Delta x$ *gọi là vi phân của hàm số* $y = f(x)$*, kí hiệu là :* $df(x) = f'(x)\Delta x$ *(2).*

Tính vi phân của hàm số $y = x$*, ta có* $dx = (x)'\Delta x$*. Do đó ta có thể viết (2) dưới dạng :* $\boxed{df(x) = f'(x)dx \text{ hay } dy = y'dx}$ *(3)*

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

39. *Tính vi phân của hàm số* $f(x) = \sin 2x$ *tại điểm* $x = \frac{\pi}{3}$ *ứng với* $\Delta x = 0{,}01$*;* $\Delta x = 0{,}001$

Giải

$df(x_o) = f'(x_o)\Delta x$. Ta có $f(x) = 2\cos 2x$

$df(\frac{\pi}{3}) = 2\cos\frac{2\pi}{3} . \Delta x = -\Delta x$

Với $\Delta x = 0{,}01$ thì $df(\frac{\pi}{3}) = -0{,}01$

Với $\Delta x = 0{,}001$ thì $df(\frac{\pi}{3}) = -0{,}001$

40. *Tính vi phân của các hàm số sau :*

a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{a+b}$ *(a và b là các hằng số) ;* b) $y = x\sin x$ *;*

c) $y = x^2 + \sin^2 x$ *;* d) $y = \tan^3 x$*.*

Giải

a) Ta có $y' = \dfrac{1}{2(a+b)\sqrt{x}} \Rightarrow dy = \dfrac{1}{2(a+b)\sqrt{x}}dx$

b) $y' = \sin x + x\cos x \Rightarrow dy = y'dx = (\sin x + x\cos x)dx$

c) $dy = y'dx = (2x + \sin 2x)dx$

d) $dy = y'dx = 3\tan^2 x(1 + \tan^2 x)dx$

41. *Áp dụng công thức (1), tìm giá trị gần đúng của các số sau (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).*

a) $\dfrac{1}{0,9995}$; *b)* $\sqrt{0,996}$; *c)* $\cos 45^\circ 30'$

Giải

a) Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$, ta có $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

Đặt $x_o = 1$, $\Delta x = -0,0005$ và áp dụng công thức gần đúng

$$f(x_o + \Delta x) \approx f(x_o) + f'(x_o)\Delta x$$

ta được : $\dfrac{1}{x_o + \Delta x} \approx \dfrac{1}{x_o} - \dfrac{1}{x_o^2}.\Delta x,$

hay : $\dfrac{1}{0,9995} \approx 1 + 0,0005 = 1,0005.$

b) Xét $f(x) = \sqrt{x}$ ta có $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$x_o = 1$, $\Delta x = -0,004$

$f(x_o + \Delta x) \approx f(x_o) + f'(x_o)\Delta x \Leftrightarrow \sqrt{0,996} \approx 1 - \dfrac{1}{2}.0,004 = 0,998$

c) Xét hàm số $f(x) = \cos x$, ta có $f'(x) = -\sin x$. Đặt $x_o = \dfrac{\pi}{4}$, $\Delta x = \dfrac{\pi}{360}$

(Vì $\dfrac{\pi}{360} = 30'$) và áp dụng công thức gần đúng trên, ta được :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{360}\right) \approx \cos\frac{\pi}{4} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).\frac{\pi}{360}$$

Vậy $\cos 45^\circ 30' \approx \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\pi}{360} \approx 0,7009$

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Cho* $y = \sqrt{x^2 - 2x}$, *chứng minh rằng* $ydy - (x - 1)dx = 0$.

2. *Tìm giá trị gần đúng của :*

a) $\sqrt[3]{215}$; *b)* $\cos 61^\circ$; *c)* $\sqrt[4]{1,04}$

Đáp số : *a) 5,9907 (xét* $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_o = 216$, $\Delta x = -1$*)*

b) 0,4849 (xét $f(x) = \cos x$, $x_o = 60^\circ$, $\Delta x = 1^\circ = 0,0174$*)*

c) 1,01

§5. ĐẠO HÀM CẤP CAO

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. **Đạo hàm cấp hai :**

Định nghĩa :

Cho hàm số f có đạo hàm f'. Nếu f' cũng có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp hai của hàm f và kí hiệu là f'', tức là :

$$f'' = (f')'$$

f' còn gọi là đạo hàm cấp một của hàm số f. Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ còn được kí hiệu là y''.

2. **Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai :**

Gia tốc (tức thời) $a(t_o)$ tại thời điểm t_o của một chất điểm chuyển động cho bởi phương trình $s = s(t)$ bằng đạo hàm cấp hai của hàm số $s = s(t)$ tại điểm t_o, tức là :

$$a(t_o) = s''(t_o)$$

Gia tốc tại thời điểm t_o đặc trưng cho sự biến đổi vận tốc của chuyển động tại thời điểm đó.

3. **Đạo hàm cấp cao :**

Cho hàm số f có đạo hàm cấp n – 1 (với $n \in N$, $n \geq 2$) là $f^{(n-1)}$. Nếu $f^{(n-1)}$ là hàm số có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của hàm số f và kí hiệu là $f^{(n)}$. Nói các khác :

$$f^{(n)} = [f^{(n-1)}]', \ (n \in N, \ n \geq 2)$$

Đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x)$ còn được kí hiệu là $y^{(n)}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

42. *Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau đến cấp được cho kèm theo.*

a) $f(x) = x^4 - \cos 2x, f^{(4)}(x)$; *b)* $f(x) = \cos^2 x, f^{(5)}x$;

c) $f(x) = (x + 10)^6, f^{(n)}(x)$.

● ***Giải***

a) Ta có : $f'(x) = 4x^3 + 2\sin 2x$; $f''(x) = 12x^2 + 4\cos 2x$

$f^{(3)} = 24x - 8\sin 2x$; $f^{(4)}(x) = 24 - 16\cos 2x$

b) $f'(x) = 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x$; $f''(x) = -2\cos 2x$

$f^{(3)}(x) = 4\sin 2x$; $f^{(4)} = 8\cos 2x$; $f^{(5)}(x) = -16\sin 2x$

c) $f'(x) = 6(x + 10)^5$; $f''(x) = 30(x + 10)^4$; $f^{(3)}(x) = 120(x + 10)^3$

$f^{(4)}(x) = 360(x + 10)^2$; $f^{(5)}(x) = 720(x + 10)$; $f^{(6)}(x) = 720$

$f^{(n)}(x) = 0\ \forall n \geq 7$

43. *Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$, ta có :*

a) Nếu $f(x) = \frac{1}{x}$ thì $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}}$;

b) Nếu $f(x) = \cos x$ thì $f^{(4n)}(x) = \cos x$;

c) Nếu $f(x) = \sin ax$ (a là hằng số) thì $f^{(4n)}(x) = a^{4n}\sin ax$.

Giải

a) Cho $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$. Ta hãy chứng minh công thức :

$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}}$ $(\forall n \geq 1)$ (1) bằng phương pháp qui nạp.

+ Với n = 1, ta có : $f^{(n)}(x) = f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ và $\frac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}} = -\frac{1}{x^2}$

Suy ra (1) đúng khi n = 1.

+ Giả sử (1) đúng cho trường hợp n = k $(k \geq 1)$, tức là $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k.k!}{x^{k+1}}$,

ta phải chứng minh (1) cũng đúng cho trường hợp n = k + 1, tức là :

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}.(k+1)!}{x^{k+2}}$$

Thật vậy, ta có :

$$f^{(k+1)}(x) = [f^{(k)}(x)]' = -\frac{(-1)^k k!.(k+1)x^k}{x^{2(k+1)}} = \frac{(-1)^{k+1}.(k+1)!}{x^{k+2}}$$

b) Cho $f(x) = \cos x$. Ta hãy chứng minh công thức :

$f^{(4n)}(x) = \cos x$ $(\forall n \geq 1)$ (2) bằng phương pháp qui nạp.

Ta có : $f'(x) = -\sin x$; $f''(x) = -\cos x$; $f'''(x) = \sin x$; $f^{(4)}(x) = \cos x$

+ Với n = 1 thì $f^{(4n)}(x) = f^{(4)}(x) = \cos x$

Suy ra (2) đúng khi n = 1

+ Giả sử (2) đúng cho trường hợp n = k $(k \geq 1)$, tức là : $f^{(4k)}(x) = \cos x$, ta phải chứng minh (2) cũng đúng cho trường hợp n = k + 1, tức là phải chứng minh : $f^{(4(k+1))}(x) = \cos x$ (hay $f^{(4k+4)}(x) = \cos x$).

Thật vậy, vì : $f^{(4k)}(x) = \cos x$ nên $f^{(4k+1)}(x) = -\sin x$;

$f^{(4k+2)}(x) = -\cos x$; $f^{(4k+3)}(x) = \sin x$; $f^{(4k+4)}(x) = \cos x$

c) Ta có : $f'(x) = a\cos ax$; $f''(x) = -a^2\sin ax$;

$f^{(3)}(x) = -a^3\cos ax$; $f^{(4)}(x) = a^4\sin ax$.

Với n = 1 ta có $f^{(4)}(x) = a^4\sin ax$, đẳng thức đúng với n = 1

Giả sử đẳng thức đúng với n = k tức là : $f^{(4k)}(x) = a^{4k}\sin ax$

Với n= k + 1 ta có $f^{(4k+4)}(x) = (f^{(4k)})^{(4)}(x) = (a^{4k}\sin ax)^{(4)}$ do $f^{(4k)}(x) = a^{4k}\sin ax$

$f^{(4k+1)}(x) = a^{4k+1}\cos ax$; $f^{(4k+2)}(x) = -\,a^{4k+2}\sin ax$

$f^{(4k+3)}(x) = -a^{4k+3}\cos ax$; $f^{(4k+4)}(x) = a^{4k+4}\sin ax$

Vậy đẳng thức đúng với n = k + 1, do đó đẳng thức đúng với mọi n.

44. *Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó t tính bằng giây (s), t > 0 và v(t) tính bằng mét/giây (m/s). Tìm gia tốc của chất điểm :*

a) Tại thời điểm t = 4s;

b) Tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng 11 m/s.

Giải

Ta có $a(t) = v'(t) = 8 + 6t$

a) Khi t = 4s thì $a(4) = 32\text{m/s}^2$

b) Khi v(t) = 11 m/s thì ta được : $8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{11}{3} \text{ (loại)}\end{array}\right.$

Với t = 1s thì $a(1) = 14\text{m/s}^2$

45. *Tính vi phân của mỗi hàm số sau :*

a) $y = \tan^2 3x - \cot 3x^2$;   *b)* $y = \sqrt{\cos^2 2x + 1}$

Giải

a) $y' = 2\tan 3x\,.\,3(1 + \tan^2 3x) + 6x(1 + \cot^2 3x^2)$

$\Rightarrow dy = y'dx = [6\tan 3x(1 + \tan^2 3x) + 6x(1 + \cot^2 3x^2)]dx$

b) $y' = \dfrac{2\cos 2x.(-2\sin 2x)}{2\sqrt{\cos^2 2x + 1}} = \dfrac{-\sin 4x}{\sqrt{\cos^2 2x + 1}}$ $\Rightarrow dy = y'dx = -\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 2x + 1}}dx$

46. *Dùng vi phân để tính gần đúng (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn) :*

a) $\dfrac{1}{\sqrt{20,3}}$. *Hướng dẫn : Xét hàm số* $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *tại điểm* $x_o = 20,25 = 4,5^2$ *với* $\Delta x = 0,05$

b) $\tan 29°30'$. *Hướng dẫn : Xét hàm số y = tanx tại điểm* $x_o = \dfrac{\pi}{6}$ *với* $\Delta x = -\dfrac{\pi}{360}$

Giải

a) Vì $\dfrac{1}{\sqrt{20,3}} = \dfrac{1}{\sqrt{20,25 + 0,05}}$ nên ta xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tại $x_o = 20,25$

Với $\Delta x = 0,05$. Ta có :

$f(x_o) = \dfrac{1}{\sqrt{20,25}} = \dfrac{1}{4,5}$; $f'(x_o) = -\dfrac{1}{2.20,25.\sqrt{20,25}} = -\dfrac{1}{182,25}$. Do đó :

$$\frac{1}{\sqrt{20,3}} = f(20,3) = f(x_o + 0,05) = f(x_o) + f'(x_o).0,05 = \frac{1}{4,5} - \frac{0,05}{182,25} \approx 0,222$$

b) Vì $\tan 29^\circ 30' = \tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{360}\right)$ nên ta xét hàm số $f(x) = \tan x$ tại $x_o = \frac{\pi}{6}$

Với $\Delta x = -\frac{\pi}{360}$. Ta có :

$f(x_o) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $f(x_o) = 1 + \tan^2\frac{\pi}{6} = \frac{4}{3}$. Do đó :

$$\tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{360}\right) \approx f(x_o) + f'(x_o)\Delta x = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}\left(-\frac{\pi}{360}\right) \approx 0{,}566$$

47. *a) Cho hàm số $f(x) = \tan x$. Tính $f^{(n)}(x)$ với $n = 1, 2, 3$.*

b) Chứng minh rằng nếu $f(x) = \sin^2 x$ thì $f^{(4x)}(x) = -2^{4n-1}\cos 2x$ (1)

Giải

a) $f'(x) = 1 + \tan^2 x$; $\quad f''(x) = 2\tan x(1 + \tan^2 x)$;

$f^{(3)}(x) = 2(1 + \tan^2 x)^2 + 4\tan^2 x(1 + \tan^2 x)$

b) Với n = 1 ta có $f'(x) = \sin 2x$; $\quad f''(x) = 2\cos 2x$

$f^{(3)}(x) = -4\sin 2x$; $\quad f^{(4)}(x) = -8\cos 2x$

Vậy (1) đúng với n = 1

Giả sử (1) đúng với n = k tức là : $f^{(4k)}(x) = -2^{4k-1}\cos 2x$

Với n = k + 1 ta có : $f^{(4k+1)}(x) = (f^{(4k)}(x))' = 2^{4k}\sin 2x$

$f^{(4k+2)}(x) = 2^{4k+1}\cos 2x$; $f^{(4k+3)}(x) = -2^{4k+2}\sin 2x$

$f^{(4k+4)}(x) = -2^{4k+3}\cos 2x$

Vậy (1) đúng với n = k + 1 do đó (1) đúng với mọi n.

48. *Chứng minh rằng :*

a) Nếu $y = A\sin(\omega t + \varphi) + B\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó A, B, ω và φ là những hằng số, thì $y'' + \omega^2 y = 0$

b) Nếu $y = \sqrt{2x - x^2}$ thì $y^3 y'' + 1 = 0$

Giải

a) $y = A\sin(\omega t + \varphi) + B\cos(\omega t + \varphi)$ nên

$y' = A\omega\cos(\omega t + \varphi) - B\omega\sin(\omega t + \varphi)$

$y'' = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) - B\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$

Suy ra : $y'' + \omega^2 y = -[A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) + B\omega^2\cos(\omega t + \varphi)]$

$+ \omega^2[A\sin(\omega t + \varphi) + B\cos(\omega t + \varphi)] = 0$

b) Ta có : $y' = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$

$$y' = \frac{-\sqrt{2x - x^2} - (1 - x).\frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}}{(2x - x^2)} = \frac{-2x + x^2 - 1 + 2x - x^2}{\sqrt{(2x - x^2)^3}} = \frac{-1}{\sqrt{(2x - x^2)^3}}$$

Suy ra $y^3.y'' + 1 = \sqrt{(2x - x^2)^3} \cdot \frac{-1}{\sqrt{(2x - x^2)^3}} + 1 = 0$

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Tìm đạo hàm cấp n của :*

a) $y = \dfrac{1}{x(x-1)}$; *b)* $y = \sin ax$.

ĐS : a) $y^{(n)} = (-1)^n.n!\left(\dfrac{1}{x^{n+1}} - \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$; *b)* $y^{(n)} = a^n\sin(ax + n\dfrac{\pi}{2})$

2. *Cho* $y = \dfrac{x-3}{x+4}$. *Chứng minh rằng* $2y'^2 = (y-1)y''$

3. *Cho* $y = \sqrt{x+1}$, *chứng minh rằng* $4y^3y'' + 1 = 0$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG 5

49. *Tìm đạo hàm của các hàm số sau :*

a) $y = \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{5x^3}{3} - \sqrt{2x} + 1$; *b)* $y = \dfrac{x^2 + 3x - a^2}{x-1}$ *(a là hằng số) ;*

c) $y = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x$; *d)* $y = \tan^2 x + \tan x^2$.

Giải

a) $y' = 2x^3 + 5x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

b) $y' = \dfrac{(2x+3)(x-1) - (x^2 + 3x - a^2)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x + a^2 - 3}{(x-1)^2}$

c) $y' = -2x\cos x - (2 - x^2)\sin x + 2\sin x + 2x\cos x = x^2\sin x$

d) $y' = 2\tan x(1 + \tan^2 x) + 2x(1 + \tan^2 x^2)$

50. *a) Chứng minh rằng* $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$, *trong đó* $n \in N^*$

b) Hãy so sánh với công thức $(x^n)' = nx^{n-1}$ *và nêu nhận xét.*

Giải

a) Ta có $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{(x^n)'}{x^{2n}} = \dfrac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$

b) Ta có $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$ (Theo a)

Nhận xét : Công thức $(x^n)' = nx^{n-1}$ đúng với mọi giá trị nguyên của n (chú ý rằng khi $n \le 0$ thì chỉ có thể xét đạo hàm trên $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$).

51. *Tìm đạo hàm đến cấp được nêu kèm theo của các hàm số sau* $(n \in N^*)$

a) $y = \sin x$, y''' ; *b)* $y = \sin x\sin 5x$, $y^{(4)}$;

c) $y = (4 - x)^5$, $y^{(n)}$; *d)* $y = \dfrac{1}{2+x}$, $y^{(n)}$;

e) $y = \dfrac{1}{2x+1}$, $y^{(n)}$; *f)* $y = \cos^2 x$, $y^{(2n)}$.

Giải

a) $y' = \cos x$; $y'' = -\sin x$; $y''' = -\cos x$

b) $y = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 6x)$

$y' = -2\sin 4x + 3\sin 6x$; $y'' = -8\cos 4x + 18\cos 6x$

$y''' = 32\sin 4x - 108\sin 6x$; $y^{(4)} = 128\cos 4x - 648\cos 6x$

c) $y' = -5(4 - x)^4$; $y'' = 20(4 - x)^3$; $y''' = -60(4 - x)^2$

$y^{(4)} = 120(4 - x)$; $y^{(5)} = -120$; $y^{(n)} = 0\ (\forall n \geq 6)$

d) $y = \frac{1}{x + 2} = (x + 2)^{-1}$; $y' = -1(x + 2)^{-2}$; $y'' = (-1)(-2)(x + 2)^{-3}, \ldots$

Bằng qui nạp ta chứng minh được :

$$y^{(n)} = (-1)(-2)\ldots(-n).(x + 2)^{-n-1} = (-1)^n . \frac{n!}{(x + 2)^{n+1}}$$

e) $y = (2x + 1)^{-1}$; $y' = (-1)(2(2x + 1)^{-2}$; $y'' = (-1)(-2).2^2(2x + 1)^{-3}, \ldots$

Bằng qui nạp ta chứng minh được : $y^{(n)} = (-1)^n . \frac{2^n . n!}{(2x + 1)^{n+1}}$

f) Ta có : $y' = -\sin 2x$; $y'' = -2\cos 2x$; $y''' = 2^2\sin 2x$

$y^{(4)} = 2^3\cos 2x$; $y^{(5)} = -2^4\sin 2x$; $y^{(6)} = -2^5\cos 2x, \ldots$

Bằng qui nạp ta dễ dàng chứng minh được : $y^{(2n)} = (-1)^n.2^{2n-1}\cos 2x$.

52. *Tính vi phân của hàm số* $y = \frac{1}{(1 + \tan x)^2}$ *tại điểm* $x = \frac{\pi}{6}$ *ứng với* $\Delta x = \frac{\pi}{360}$ *(tính chính xác đến hàng phần vạn)*

Giải

$$\text{Ta có : } df(x) = \frac{-2(1 + \tan x)\frac{1}{\cos^2 x}}{(1 + \tan x)^4} . \Delta x = \frac{-2\Delta x}{\cos^2 x(1 + \tan x)^3}$$

$$\text{Suy ra : } df\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-2.\frac{\pi}{360}}{\cos^2 \frac{\pi}{6}\left(1 + \tan\frac{\pi}{6}\right)^3} = \frac{-\pi}{180.\frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3} \approx -0{,}0059$$

53. *Gọi (C) là đồ thị của hàm số* $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$*. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong mỗi trường hợp sau :*

a) Biết tung độ của tiếp điểm bằng 2;

b) Biết rằng tiếp tuyến song song với trục hoành;

c) Biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{8}x + 3$*;*

d) Biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm A(0; –6).

● *Giải*

a) $f'(x) = 4x^3 + 4x$. Ta có $2 = y_o = x_o^4 + 2x_o^2 - 1 \Leftrightarrow x_o^4 + 2x_o^2 - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o^2 = 1 \\ x_o^2 = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x_o = \pm 1$$

* Với $x_o = 1$ ta có $f'(1) = 4.1^3 + 4.1 = 8$

Phương trình tiếp tuyến trong trường hợp này là :

$y - 2 = 8(x - 1) \Leftrightarrow y = 8x - 6$

* Với $x_o = -1$ ta có $f'(-1) = 4.(-1)^3 + 4.(-1) = -8$

Phương trình tiếp tuyến trong trường hợp này là :

$y - 2 = -8(x + 1) \Leftrightarrow y = -8x - 6$

b) Tiếp tuyến song song với trục hoành tại điểm có hoành độ x_o thỏa :

$f'(x_o) = 0 \Leftrightarrow 4x_o^3 + 4x_o = 0 \Leftrightarrow 4x_o(x_o^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x_o = 0$ $(y_o = -1)$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là : $y = (-1) = 0(x - 0) \Leftrightarrow y = -1$

c) Vì tiếp tuyến phải tìm vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{8}x + 3$, nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng 8, suy ra : $y' = 8 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow 4(x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Theo câu a), ta được phương trình tiếp tuyến phải tìm là : $y = 2(4x - 3)$

d) *Cách 1 :* Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_o; f(x_o))$ của đồ thị (C) là

$y = f'(x_o).(x - x_o) + f(x_o) \Leftrightarrow y = (4x_o^3 + 4x_o)(x - x_o) + x_o^4 + 2x_o^2 - 1.$

Vì tiếp tuyến phải tìm đi qua điểm A(0; –6) nên ta có :

$-6 = (4x_o^3 + 4x_o)(0 - x_o) + x_o^4 + 2x_o^2 - 1$

$\Leftrightarrow 3x_o^4 + 2x_o^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x_o^2 = 1$ $x_o = \pm 1$

Theo câu a) phương trình của hai tiếp tuyến phải tìm lần lượt là :

$y = 2(4x - 3)$ và $y = -2(4x + 3)$

Cách 2 : Phương trình đường thẳng (l) đi qua điểm A(0; –6) với hệ số góc bằng k là : $y = kx - 6$

Để đường thẳng (l) là tiếp tuyến của đồ thị (C) (hay tiếp xúc với đồ thị (C) thì ta phải tìm k sao cho : $\begin{cases} f(x) = kx - 6 \\ f'(x) = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 2x^2 - 1 = kx - 6 \\ 4x^3 + 4x = k \end{cases}$

Khử k từ hệ trên ta được : $3x^4 + 2x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Suy ra $k = \pm 8$.

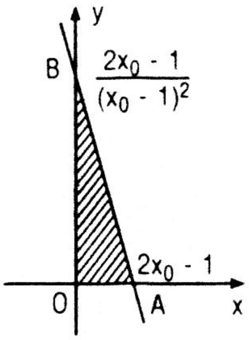
Vậy hai tiếp tuyến phải tìm có phương trình là : $y = 2(4x - 3)$ và $y = -2(4x + 3)$

54. *Tìm một điểm trên đồ thị của hàm số* $y = \frac{1}{x - 1}$ *sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2.*

Giải

Với mọi $x \neq 1$, ta có : $y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm $M_0(x_0; \dfrac{1}{x_0 - 1})$ (với $x_0 \neq 1$) là : $y = -\dfrac{1}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \dfrac{1}{x_0 - 1}$



Tiếp tuyến này cắt trục hoành tại điểm A có hoành độ x_A thỏa mãn : $\dfrac{x_A - x_0}{(x_0-1)^2} = \dfrac{1}{x_0 - 1} \Leftrightarrow x_A = 2x_0 - 1$

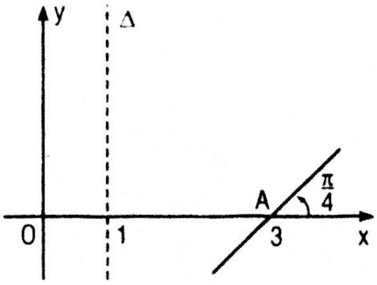
và cắt trục tung tại điểm B có tung độ y_B là :

$$y_B = \frac{x_0}{(x_0-1)^2} + \frac{1}{x_0-1} = \frac{2x_0 - 1}{(x_0-1)^2}$$

Ta có : $S_{OAB} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}|x_A|.|y_B| = 2 \Leftrightarrow \dfrac{(2x_0-1)^2}{(x_0-1)^2} = 4 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{3}{4}$

Suy ra $y_0 = \dfrac{1}{\frac{3}{4} - 1} = -4$. Vậy điểm phải tìm M_0 có tọa độ là $(\frac{3}{4}; -4)$.

55 *Đồ thị $(\mathscr{P})$ của một hàm số bậc hai $y = P(x)$ đã bị xóa đi, chỉ còn lại trục đối xứng Δ, điểm A thuộc $(\mathscr{P})$ và tiếp tuyến tại A của $(\mathscr{P})$. Hãy tìm $P(x)$ và vẽ lại đồ thị $(\mathscr{P})$*



Giải

Đa thức phải tìm có dạng : $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Ta có : $P'(x) = 2ax + b$

Vì trục đối xứng (Δ) có phương trình $x = 1$ nên : $-\dfrac{b}{2a} = 1$ (1)

Vì đồ thị $(\mathscr{P})$ đi qua điểm $A(3; 0)$ nên ta có $P(3) = 0$, tức là :

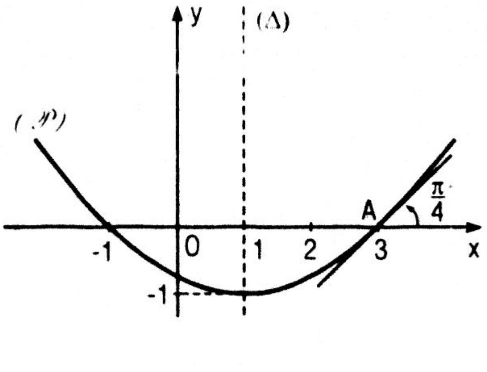
$9a + 3b + c = 0$ (2)

Vì hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $A(3; 0)$ bằng $\tan\dfrac{\pi}{4}$ nên ta có $P'(3) = 1$, tức là : $6a + b = 1$ (3)

Giải hệ ba phương trình (1), (2) và (3) với ba ẩn số a, b và c, ta được :

$a = \dfrac{1}{4}$; $b = -\dfrac{1}{2}$ và $c = -\dfrac{3}{4}$

Vậy $P(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$



56. *Cho parabol $(\mathscr{P}) : y = x^2$. Gọi M_1 và M_2 là hai điểm thuộc $(\mathscr{P})$, lần lượt có hoành độ là $x_1 = -2$ và $x_2 = 1$. Hãy tìm trên $(\mathscr{P})$ một điểm C sao cho tiếp tuyến tại C song song với cát tuyến M_1M_2. Viết phương trình của tiếp tuyến đó.*

Giải

Các điểm M_1 và M_2 có tọa độ là $M_1(-2; 4)$; $M_2(1; 1)$.

Hệ số góc của cát tuyến M_1M_2 là $\tan\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4-1}{-2-1} = -1$

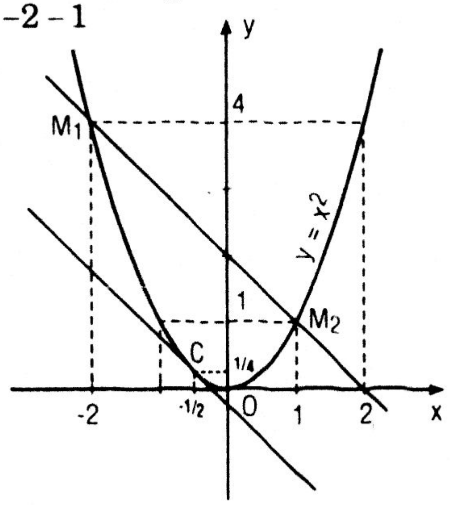
Vì tiếp tuyến tại điểm $C(x_o; x_o^2)$ song song với cát tuyến M_1M_2 nên ta có :

$$y'(x_o) = -1 \Leftrightarrow 2x_o = -1 \Leftrightarrow x_o = \frac{-1}{2},$$

Suy ra tọa độ của điểm C là $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right)$

Vậy phương trình tiếp tuyến phải tìm là :

$$y = (-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = -x - \frac{1}{4}$$



57. *Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$, ở đó, t tính bằng giây (s) $t > 0$ và s tính bằng mét (m).*

a) Tính vận tốc tại thời điểm $t = 2$; *b) Tính gia tốc tại thời điểm $t = 3$;*

c) Tính gia tốc tại thời điểm vận tốc bằng 0;

d) Tính vận tốc tại thời điểm gia tốc bằng 0.

Giải

Ta có $s' = 3t^2 - 6t - 9$; $s'' = 6t - 6$

a) Vận tốc tại thời điểm $t = 2$ là : $v = s'(2) = -9\text{m/s}$

b) Gia tốc tại thời điểm $t = 3$ là : $a = s''(3) = 12\text{ m/s}^2$

c) $v = s' = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3$

$a(3) = s''(3) = 12\text{m/s}^2$

d) $a = s'' = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$v(1) = s'(1) = -12\text{m/s}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

58. *Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai (đánh dấu vào ô trống thích hợp) ?*

a) Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi điểm mà nó xác định.

đúng ☐ *sai* ☐

b) Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi điểm mà nó xác định.

đúng ☐ *sai* ☐

c) Hàm số $y = |x|$ có đạo hàm tại mọi điểm mà nó xác định.

đúng ☐ *sai* ☐

Trả lời

a) Đúng; b) Sai (vì hàm số $t = \sqrt{x}$ không có đạo hàm tại $x = 0$)

c) Sai (Vì hàm số $y = |x|$ không có đạo hàm tại $x = 0$)

Với mỗi bài từ 59 đến bài 62, hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả đã cho :

59. *Tiếp tuyến của đồ thị hàm số* $y = \dfrac{4}{x-1}$ *tại điểm với hoành độ* $x = -1$ *có phương trình là : (A)* $y = -x - 3$; *(B)* $y = -x + 2$; *(C)* $y = x - 1$; *(D)* $y = x + 2$.

Trả lời

Ta có : $y(-1) = -2$; $\quad y' = -\dfrac{4}{(x-1)^2} < 0\ \forall x \neq 1$. Chọn (A)

60. *Tiếp tuyến của đồ thị hàm số* $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ *tại điểm với hoành độ* $x = \dfrac{1}{2}$ *có phương trình là : (A)* $2x - 2y = -1$; *(B)* $2x - 2y = 1$; *(C)* $2x + 2y = 3$; *(D)* $2x + 2y = -3$

Trả lời

$$y' = \frac{-1}{2x\sqrt{2x}}\ ; \qquad y\left(\frac{1}{2}\right) = 1\ ; \qquad y'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

Phương trình tiếp tuyến : $y - 1 = -1(x - \dfrac{1}{2}) \Leftrightarrow y = -x + \dfrac{3}{2}$. Chọn (C)

61. *Hàm số có đạo hàm bằng* $2x + \dfrac{1}{x^2}$ *là :*

(A) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x}$; *(B)* $= \dfrac{x^3 + 5x - 1}{x}$;

(C) $y = \dfrac{3(x^2 + x)}{x^3}$; *(D)* $= \dfrac{2x^2 + x - 1}{x}$.

Trả lời

Ta có $y = \dfrac{x^3 + 5x - 1}{x} = x^2 - \dfrac{1}{x} + 5 \Rightarrow y' = 2x + \dfrac{1}{x^2}$. Chọn (B)

62. *Đạo hàm cấp 2010 của hàm số y = cosx là :*

(A) sinx; (B) – sinx ; (C) cosx ; (D) – cosx.

Trả lời

$(\cos x)^{(4n)} = \cos x$; $(\cos x)^{(4n+2)} = -\cos x$. Mà $2010 = 4n + 2$ nên chọn (D)

63. *Điền nội dung thích hợp vào chỗ trống :*

a) Hàm số hợp của hàm số y = cotu và hàm số trung gian $u = \sqrt{x}$ *là*

$y = \dots\dots\dots\dots$

b) Hàm số hợp của hàm số $y = u^n$ *và hàm số trung gian u = cosx + sinx là*

$y = \dots\dots\dots\dots$

c) Hàm số $y = \tan 3x$ là hàm số hợp của hàm số $y =$ .... và hàm số trung gian $u =$ ....

d) Hàm số $y = \sqrt{\cos x}$ là hàm số hợp của hàm số $y =$ .... và hàm số trung gian $u =$..........

Trả lời

a) $\cot\sqrt{x}$; b) $(\sin x + \cos x)^n$; c) tanu và 3x ; d) $\sqrt{u}$ và cosx.

BÀI TẬP ÔN LÀM THÊM

1. *Cho hàm số f xác định bởi :* $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \le 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

Xác định a và b để hàm số có đạo hàm tại x = 1.

Giải

Để hàm số có đạo hàm tại x = 1, trước hết hàm số phải liên tục tại x = 1, ta có :

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (ax + b) = a + b$. Vậy $a + b = 1$

Ta có : $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'_-(1) = 2$; $f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a \Rightarrow f'_+(1) = a$

f có đạo hàm tại x = 1 thì $f'_-(1) = f'_+(1)$ hay $a = 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $a = 2$, $b = -1$

2. *Cho hàm số f xác định bởi :* $f(x) \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \le 1 \\ -x^2 + bx + c & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

Xác định b và c để f có đạo hàm tại x = 1.

Giải

Để f có đạo hàm tại x = 1 trước hết f phải liên tục tại x = 1. Ta có :

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = \lim\limits_{x \to 1^+} (-x^2 + bx + c) = 1$

$\Leftrightarrow -1 + b + c = 1 \Leftrightarrow b + c = 2$ (1)

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'_-(1) = 2$

$f(x) = -x^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = -2x + b \Rightarrow f'_+(1) = -2 + b$

Từ $f'_-(1) = f'_+(1)$ suy ra $2 = -2 + b$ hay $b = 4$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $b = 4$, $c = -2$

3. *Dùng định nghĩa tính đạo hàm các hàm số :*

a) $f(x) = x.\sin x$; *b)* $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ *tại* $x = 3$;

c) $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ *tại* $x = 0$

4. *Tính đạo hàm cấp n của hàm số :* $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$. ***HD :*** $y = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$

5. *Cho (C) : $y = f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$*

a) Chứng minh trên (C) không có điểm nào mà tại đó tiếp tuyến với (C) song song với trục hoành.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng : $x + y - 1 = 0$.

6. *Cho hàm số* $f(x) = \begin{cases} x & khi\ x \le 1 \\ ax^2 + b & khi\ x > 1 \end{cases}$

Định a, b để hàm số có đạo hàm tại $x = 1$. *Đáp số : $a = b = \frac{1}{2}$*

ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. *a) Tính $\sin\frac{\pi}{8}$ và $\cos\frac{\pi}{8}$*

b) Chứng minh rằng có hằng số $C > 0$ để có đẳng thức :

$\sin x + (\sqrt{2} - 1)\cos x = C\cos(x - \frac{3\pi}{8})$ với mọi x.

Giải

a) Ta có $$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

b) Ta có $1^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{2}$. Do đó :

$$\sin x + (\sqrt{2} - 1)\cos x = (\sqrt{4 - 2\sqrt{2}})\left(\frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}\sin x + \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}\cos x\right)$$

$$= \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\cos x\right) = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}\cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right)$$

Vì $\frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{8}$. Vậy $C = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

2. *Giải phương trình $\tan x = \cot 2x$*

Biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Giải

Điều kiện $\cos x.\sin 2x \ne 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ne k\frac{\pi}{2}$

$$\tan x = \cot 2x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \Leftrightarrow \cos 2x - \sin x\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos x(4\cos^2 x - 3) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$$

Biểu diễn nghiệm trên đường tròn được 4 điểm.

3. *a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P(x) = (\sin x + \cos x)^3$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $R(x) = P(x) + Q(x)$

Giải

a) $P(x) = 2\sqrt{2}\cos^3(x - \frac{\pi}{4}) \geq -2\sqrt{2}$ (đẳng thức xảy ra, chẳng hạn khi $x = -\frac{3\pi}{4}$)

Vậy $\min P(x) = -2\sqrt{2}$

b) $Q(x) = \dfrac{4}{\sin^2 2x} \geq 4$ (đẳng thức xảy ra, chẳng hạn khi $x = \pm\frac{3\pi}{4}$)

Vậy $\min Q(x) = 4$

c) $R(x) = P(x) + Q(x) \geq 4 - 2\sqrt{2}$ (đẳng thức xảy ra, chẳng hạn khi $x = -\frac{3\pi}{4}$)

Vậy $\min R(x) = 4 - 2\sqrt{2}$.

4. *Giải các phương trình :*

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$;

b) $\sin^2 2x - \sin^2 x = \sin^2\frac{\pi}{4}$;

c) $\cos x\cos 2x = \cos 3x$;

d) $\tan 2x - \sin 2x + \cos 2x - 1 = 0$

Giải

a) $$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) $$\sin^2 2x - \sin^2 x = \sin^2\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 4\sin^2 x\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8\sin^2 x(1 - \sin^2 x) - 2\sin^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow 8\sin^4 x - 6\sin^2 x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = \frac{1}{2} \\ \sin^2 x = \frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

c) $$\cos x\cos 2x = \cos 3x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) = \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = x + k2\pi \\ 3x = -x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

d) $$\tan 2x - \sin 2x + \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan 2x(1 - \cos 2x) - (1 - \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos 2x)(\tan 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan 2x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

5. *Giải các phương trình sau :*

a) $2\sin(x + 10^o) - \sqrt{12}\cos(x + 10^o) = 3$; *b)* $\sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 2\cos 3x$;

c) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$

Giải

a) $a^2 + b^2 = 2^2 + (-\sqrt{12})^2 = 16$. Chia hai vế cho $\sqrt{a^2 + b^2} = 4$ ta được :

$$\frac{1}{2}\sin(x + 10^o) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x + 10^o) = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + 10^o)\cos 60^o - \sin 60^o\cos(x + 10^o) = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - 50^o) = \sin\alpha \text{ với } \sin\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 50^o = \alpha + k360^o \\ x - 50^o = 180^o - \alpha + k360^o \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 50^o + k360^o \\ x = 230^o - \alpha + k360^o \end{array}\right.$$

b) $\sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 2\cos 3x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\sin 5x = \cos 3x$

$$\Leftrightarrow \cos 5x.\cos\frac{\pi}{6} + \sin 5x\sin\frac{\pi}{6} = \cos 3x \Leftrightarrow \cos(5x - \frac{\pi}{6}) = \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x - \frac{\pi}{6} = 3x + k2\pi \\ 5x - \frac{\pi}{6} = -3x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{48} + k\frac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

c) * $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \pm 1$ nên $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ không là nghiệm của phương trình.

* Chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được :

$$\tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan 2 + k\pi \end{array}\right.$$

6. *Giải các phương trình :*

a) $2\tan^2 x + 3 = \frac{3}{\cos x}$; *b)* $\tan^2 x = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$; *c)* $\tan x + \tan 2x = \frac{\sin 3x}{\cos x}$

Giải

a) Đặt $t = \frac{1}{\cos x}$ $(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$

Ta có : $2(t^2 - 1) + 3 = 3t \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = 2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$$

b) Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\tan^2 x = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos^2 x}{1-\sin x} = 1+\cos x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ 1-\cos x = 1-\sin x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ \tan x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\pi + k2\pi\\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in Z)\end{array}\right.$$

c) Điều kiện $\cos x \neq 0, \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \neq 0\\ \cos x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$

$$\tan x + \tan 2x = \frac{\sin 3x}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = \sin 3x\cos 2x \Leftrightarrow \sin 3x(1-\cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0\\ \cos 2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0\\ \sin x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{3}, k \in Z$$

7. *Một đoàn tàu nhỏ có 3 toa khách đỗ ở sân ga. Có 3 hành khách bước lên tàu. Hỏi :*

a) Có bao nhiêu khả năng trong đó 3 hành khách lên 3 toa khác nhau ?

b) Có bao nhiêu khả năng trong đó 2 hành khách cùng lên một toa, còn hành khách thứ ba thì lên toa khác ?

Giải

a) Mỗi cách xếp 3 người vào 3 toa, mỗi toa một người là một hoán vị của tập hợp 3 hành khách. Vậy có 3! = 6 khả năng.

b) Có $C_3^2 = 3$ cách chọn hai hành khách đi chung toa. Với mỗi cách ấy lại có 3 cách chọn toa tàu cho họ. Vậy có 3.3 = 9 cách chọn hai hành khách và toa tàu cho họ đi chung. Mỗi cách ấy, hành khách thứ ba có thể chọn một trong hai toa tàu còn lại. Áp dụng qui tắc nhân, ta có 9.2 = 18 khả năng có thể xảy ra.

8. *Cho tập hợp A = {1,2,...,n} với $n \in N$, $n > 1$. Hỏi có bao nhiêu cặp (x; y) với $x \in A$, $y \in A$ và $x > y$?*

Giải

Với hai phần tử x và y của A sao cho x > y, ta chỉ lập được một cặp duy nhất (x, y) thỏa mãn đề bài. Do đó mỗi cặp như vậy có thể xem là một tổ hợp chập 2 của n phần tử. Vậy có $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ cặp.

9. *Một túi chứa 16 viên bi, trong đó có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen và 3 viên bi đỏ.*

a) Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi trong túi.

+ Tính xác suất để được 2 viên bi đen.

+ Tính xác suất để được 1 viên bi đen và 1 viên bi trắng.

b) Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi trắng trong túi.

+ Tính xác suất để được 3 viên bi đỏ.

+ Tính xác suất để được 3 viên bi với 3 màu khác nhau.

● ***Giải***

a) Số trường hợp có thể là C_{16}^2. Số trường hợp rút được cả hai viên bi đen là C_6^2. Do đó xác suất để rút được 2 viên bi đen là $\frac{C_6^2}{C_{16}^2} = \frac{1}{8}$. Số trường hợp rút được 1 viên bi trắng, 1 viên bi đen là $C_7^1.C_6^1 = 42$. Do đó xác suất rút được 1 viên bi trắng, 1 viên bi đen là $\frac{42}{C_{16}^2} = \frac{7}{20}$

b) Số trường hợp có thể là C_{16}^3. Số trường hợp rút được 3 viên bi đỏ là $C_3^3 = 1$. Vậy xác suất rút được 3 viên bi đỏ là $\frac{1}{C_{16}^3} = \frac{1}{560}$. Theo qui tắc nhân, ta có 7.6.3 = 126 cách chọn 3 viên bi có 3 màu khác nhau. Vậy xác suất rút được 3 viên bi có 3 màu khác nhau là $\frac{126}{C_{16}^3} = \frac{9}{40}$.

10. *Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số điểm mà một vận động viên bắn cung nhận được khi bắn một lần. Giả sử X có bảng phân bố xác suất như sau :*

X	*9*	*7*	*5*	*3*	*1*
P	*0,2*	*0,36*	*0,23*	*0,14*	*0,07*

a) Tính điểm trung bình khi vận động viên đó bắn một lần.

b) Tính điểm trung bình khi vận động viên đó bắn 48 lần.

● ***Giải***

a) Ta có E(x) = 9.0,2 + 7.0,36 + 5.0,23 + 3.0,14 + 1.0,07 = 5,96

b) Điểm trung bình khi vận động viên đó bắn 48 lần là 48.5,96 = 286,08.

11. *Ta đã biết* $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, *tức là* $\cos\frac{\pi}{2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. *Chứng minh rằng :*

a) $\cos\frac{\pi}{2^3} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$;

b) $\cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ dấu căn}}$ *với mọi số nguyên n ≥ 2 (1)*

● ***Giải***

a) $\cos^2\frac{\pi}{2^3} = \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2^3} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

b) Với n = 2 ta có $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (1) đúng.

Giả sử (1) đúng với n = k tức là :

$$\cos\frac{\pi}{2^k} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}\ (\text{k – 1 dấu căn})$$

Với n = k + 1 ta có $\cos^2\frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}(1 + \cos\frac{\pi}{2^k})$

$$= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}) = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}})$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}\ (\text{k dấu căn})$$

Vậy (1) đúng với n = k + 1 do đó (1) đúng với $\forall n \geq 2$

12. *Cho dãy số (u_n) xác định bởi :*

$u_1 = 3$ và $u_n = 4u_{n-1} - 1$ với mọi $n \geq 2$. Chứng minh rằng :

a) $u_n = \dfrac{2^{2n+1}+1}{3}$ với mọi số nguyên $n \geq 1$ (1)

b) (u_n) là một dãy số tăng.

Giải

a) Với n = 1 ta có $u_1 = 3 = \dfrac{2^3+1}{3}$

(1) đúng với n = 1

Giả sử (1) đúng với n = k tức là ta có : $u_k = \dfrac{2^{2k+1}+1}{3}$

Với n = k + 1 ta có : $u_{k+1} = 4u_k - 1 = 4\,.\,\dfrac{2^{2k+1}+1}{3} - 1 = \dfrac{4(2^{2k+1}+)-3}{3}$

$$= \frac{2^{2k+3}+1}{3} = \frac{2^{2(k+1)}+1}{3}$$

Vậy (1) đúng với n = k + 1 do đó (1) đúng với $\forall n \geq 1$

b) Ta có : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2^{2n+3}+1}{3} - \dfrac{2^{2n+1}+1}{3} = \dfrac{2^{2n+1}(2^2-1)}{3}$

$= 2^{2n+1} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n \Rightarrow (u_n)$ là dãy số tăng

13. *Cho dãy số (u_n) xác định bởi :*

$u_1 = 5$ và $u_n = u_{n-1} - 2$ với mọi $n \geq 2$.

a) Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n);

b) Hãy tính tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n).

Giải

a) Ta có $u_{n+1} - u_n = -2\ \forall n \geq 1$

Suy ra (u_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công sai d = – 2 do đó :

$$u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + (n-1)(-2) = -2n + 7$$

b) $S_{100} = \dfrac{100}{2}(2u_1 + 99d) = 50(10 - 198) = -9400$

14 *Cho dãy số (u_n) xác định bởi :*

$$u_1 = 2 \text{ và } u_n = 3u_{n-1} \text{ với mọi } n \geq 2.$$

a) Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n);

b) Hãy tính tổng 10 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n).

Giải

Ta có $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = 3, \forall n \geq 2$

(u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$ ta được :

a) $u_n = 2.3^{n-1}$;   b) $S_{10} = 3^{10} - 1$.

15 *Các số $x - y$, $x + y$ và $3x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng, và đồng thời các số $x - 2$, $y + 2$ và $2x + 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x và y.*

Giải

Theo đề bài ta có hệ : $\begin{cases} 2(x + y) = (x - y) + (3x - 3y) \\ (y + 2)^2 = (x - 2)(2x + 3y) \end{cases}$

Giải hệ ta được : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = -\dfrac{6}{13} \\ y = -\dfrac{2}{13} \end{cases}$

16 *Tính giới hạn của các dãy số sau :*

a) $\lim \dfrac{n^4 - 40n^3 + 15n - 7}{n^4 + n + 100}$;   *b)* $\lim \dfrac{2n^3 + 35n^2 - 10n + 3}{5n^5 - n^3 + 2n}$;

c) $\lim \dfrac{\sqrt{6n^4 + n + 1}}{2n + 1}$;   *d)* $\lim \dfrac{3.2^n - 8.7^n}{4.3^n + 5.7^n}$.

Giải

a) $$\lim \frac{n^4 - 40n^3 + 15n - 7}{n^4 + n + 100} = \lim \frac{1 - \frac{40}{n} + \frac{15}{n^3} - \frac{7}{n^4}}{1 + \frac{1}{n^3} + \frac{100}{n^4}} = 1$$

b) $$\lim \frac{2n^3 + 35n^2 - 10n + 3}{5n^5 - n^3 + 2n} = \lim \frac{\frac{2}{n^2} + \frac{35}{n^3} - \frac{10}{n^4} + \frac{3}{n^5}}{5 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4}} = 0$$

c) $$\lim \frac{\sqrt{6n^4 + n + 1}}{2n + 1} = \lim \frac{n^2\sqrt{6 + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}}}{n(2 + \frac{1}{n})} = \lim \frac{n.\sqrt{6 + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}}}{2 + \frac{1}{n}} = +\infty$$

$$\text{d) } \lim\frac{3.2^n - 8.7^n}{4.3^n + 5.7^n} = \lim\frac{3.\left(\frac{2}{7}\right)^n - 8}{4\left(\frac{3}{7}\right)^n + 5} = -\frac{8}{5}$$

17. *Tính các giới hạn sau :*

a) $\lim\sqrt{3n^4 - 10n + 12}$; b) $\lim(2.3^n - 5.4^n)$;

c) $\lim(\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2)$; d) $\lim\frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n}$.

Giải

$$\text{a) } \lim\sqrt{3n^4 - 10n + 12} = \lim n^2\sqrt{3 - \frac{10}{n^3} + \frac{12}{n^4}} = +\infty$$

$$\text{b) } \lim(2.3^n - 5.4^n) = \lim 4^n\left[2\left(\frac{3}{4}\right)^n - 5\right] = -\infty$$

$$\text{c) } \lim(\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2) = \lim\frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1} + n^2} = \lim\frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + 1}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \lim\frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n} = \lim\frac{\sqrt{n^2 + 2n} + n}{2n} = \lim\frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + 1}}{2} = 1$$

18. *Tìm số hạng đầu và công bội của một cấp số nhân lùi vô hạn, biết rằng số hạng thứ hai là $\frac{12}{5}$ và tổng của cấp số nhân này là 15.*

Giải

Gọi u_1, q là số hạng đầu và công bội của cấp số nhân ($|q| < 1$). Theo đề bài ta có :

$$\begin{cases} u_1 q = \frac{12}{5} \\ \frac{u_1}{1 - q} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 \\ q = \frac{1}{5} \end{cases} ; \quad \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = \frac{4}{5} \end{cases}$$

19. *Tính giới hạn của các hàm số sau :*

a) $\lim\limits_{x \to -1}\frac{x^2 + x + 10}{x^3 + 6}$; b) $\lim\limits_{x \to -5}\frac{x^2 + 11x + 30}{25 - x^2}$;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{x^6 + 4x^2 + x - 2}{(x^3 + 2)^2}$; d) $\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{x^2 + x - 40}{2x^5 + 7x^4 + 21}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+4x^2+3}}{2x+1}$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\sqrt{\dfrac{x+1}{2x^3+x}}$;

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2+11x-100}$; h) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{5x^2+1}-x\sqrt{5})$;

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x+10}{x^3+6}=\dfrac{1+(-1)+10}{-1+6}=2$

b) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+11x+30}{25-x^2}=\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{(x+5)(x+6)}{(5-x)(5+x)}=\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x+6}{5-x}=\dfrac{1}{10}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^6+4x^2+x-2}{(x^3+2)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}-\dfrac{2}{x^6}}{\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right)^2}=1$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x-40}{2x^5+7x^4+21}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{40}{x^5}}{2+\dfrac{7}{x}+\dfrac{21}{x^5}}=+\infty$

e) Với mọi $x<0$, ta có $\dfrac{1}{x}\sqrt{2x^4+4x^2+3}=-\sqrt{2x^2+4+\dfrac{3}{x^2}}$.

Do đó : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+4x^2+3}}{2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}\sqrt{2x^4+4x^2+3}}{2+\dfrac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{2x^2+4+\dfrac{3}{x^2}}}{2+\dfrac{1}{x}}=-\infty$$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\sqrt{\dfrac{x+1}{2x^3+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{(2x+1)^2(x+1)}{2x^3+x}}=\sqrt{2}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2+11x-100}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{9+\dfrac{11}{x}-\dfrac{100}{x^2}}=+\infty$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{5x^2+1}-x\sqrt{5})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{5x^2+1}+x\sqrt{5}}=0$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}{1+\dfrac{1}{x}}=2$

20. *Chứng minh rằng phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm.*

Giải

Do $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ nên có số $\alpha < 0$ sao cho $f(\alpha) < 0$. Do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ nên có số $\beta > 0$ sao cho $f(\beta) > 0$. Hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ liên tục trên R chứa đoạn $[\alpha; \beta]$ nên theo định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại số $d \in [\alpha; \beta]$ sao cho $f(d) = 0$. Đó chính là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

21. *Tìm đạo hàm của các hàm số sau :*

a) $y = \dfrac{ax^3 + bx^2 + c}{(a+b)x}$ *(a, b, c là các hằng số);*

b) $y = \left(x^3 - \dfrac{1}{x^3} + 3\right)^4$; c) $y = x^3\cos^2 x$;

d) $y = \sin\sqrt{4 + x^2}$; e) $y = \sqrt{1 + \tan\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}$

Giải

a) $y' = \left[\dfrac{a}{a+b}x^2 + \dfrac{b}{a+b}x + \dfrac{c}{(a+b)x}\right]' = \dfrac{2a}{a+b}x + \dfrac{b}{a+b} - \dfrac{c}{(a+b)x^2}$

$= \dfrac{2ax^3 + bx^2 - c}{(a+b)x^2}$

b) $y' = 4\left(x^3 - \dfrac{1}{x^3} + 3\right)^3\left(3x^2 + \dfrac{3}{x^4}\right) = 12\left(x^3 - \dfrac{1}{x^3} + 3\right)^3\left(x^2 + \dfrac{1}{x^4}\right)$

c) $y' = 3x^2\cos^2 x - x^3\sin 2x = x^2(3\cos^2 x - x\sin 2x)$

d) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{4 + x^2}}\cos\sqrt{4 + x^2}$

e) $y' = \dfrac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{2\cos^2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1 + \tan\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}} = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2\cos^2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1 + \tan\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}}$

22. *Cho hàm số $y = mx^3 + x^2 + x - 5$. Tìm m để :*

a) y' bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất;

b) y' có hai nghiệm trái dấu;

c) y' > 0 với mọi x.

Giải

a) Ta có $y' = 3mx^2 + 2x + 1$

Ta có $y' = 3mx^2 + 2x + 1$ là bình phương của một nhị thức bậc nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} 3m > 0 \\ \Delta' = 1 - 3m = 0 \end{cases}$

b) y' có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 3m . 1 < 0 \Leftrightarrow m < 0$

c) Với m = 0 $y' = 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$ (không thỏa yêu cầu)

Với $m \neq 0$ $y' > 0\ \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} 3m > 0 \\ \Delta' = 1 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$

23. *Giải các phương trình sau :*

a) y' = 0, với $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \sin x - 3$ *;*

b) y' = 0, với $y = \sin 3x - 2\cos 3x - 3x + 4$

Giải

a) Ta có $y' = \cos 2x + \cos x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in Z)$$

b) $y' = 3\cos 3x + 6\sin 3x - 3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos 3x + 2\sin 3x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 3x + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 3x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(3x - \alpha) = \cos\alpha \text{ (với } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - \alpha = \alpha + k2\pi \\ 3x - \alpha = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\alpha}{3} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

24. *Cho hyperbol (H) xác định bởi phương trình* $y = \frac{1}{x}$

a) Tìm phương trình tiếp tuyến (T) của (H) tại tiếp điểm A có hoành độ a (với a ≠ 0).

b) Giả sử (T) cắt trục Ox tại điểm I và cắt trục Oy tại điểm J. Chứng minh rằng A là trung điểm của đoạn thẳng IJ. Từ đó suy ra cách vẽ tiếp tuyến (T).

c) Chứng minh rằng diện tích tam giác OIJ không phụ thuộc vào vị trí của điểm A.

Giải

Với mọi $x \neq 0$, ta có : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

a) Phương trình tiếp tuyến (T) tại điểm $A(a ; \frac{1}{a})$ là

$$y = -\frac{1}{a^2}(x - a) \text{ hay } y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại : (04) 3971 4896 - Fax : (04) 3971 4899

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc : **PHÙNG QUỐC BẢO**
Tổng biên tập : **PHẠM THỊ TRÂM**
Biên tập : Lan Hương
Sửa bài : Tác giả
Trình bày : Ngọc Anh
Bìa : Công ty Sách Hoa Hồng
Đối tác liên kết xuất bản : Công ty Sách Hoa Hồng

GIẢI BÀI TẬP ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11 NÂNG CAO

Mã số : 1L-165ĐH2010

In 3000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty CP In Tiền Giang.
Số xuất bản: 290-2010/CXB/13-50/ĐHQGHN, ngày 01/4/2010.
Quyết định xuất bản số : 165LK-TN/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2010.